

УДК 531.13

О.Н.ДМИТРОЧЕНКО, Н.Н.МИХАЙЛОВ, Д.Ю.ПОГОРЕЛОВ

Брянский государственный технический университет

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПОДХОДА СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотрена проблема представления тонкого упругого стержня системой шарнирно связанных абсолютно твердых тел с целью достоверного определения положений равновесия, собственных частот и форм колебаний стержня с учетом геометрической нелинейности. Исследование проведено на примере кабеля питания жесткого диска. Корректность расчетной модели проверена с использованием экспериментальной модели.

### 1. Постановка проблемы

Рассмотрим задачу определения положения равновесия, собственных частот и форм колебаний упругого кабеля системы съема информации жесткого

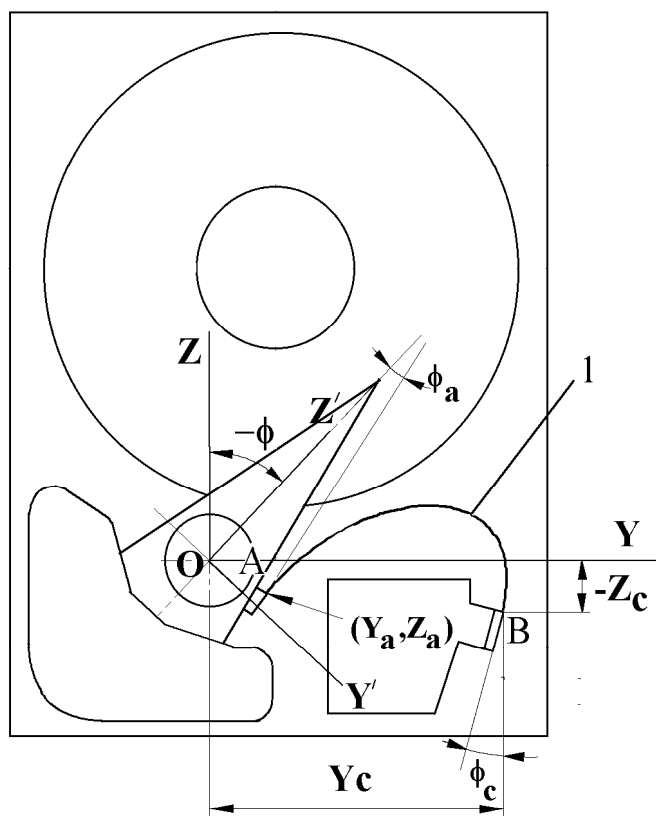


Рис.1

диска (рис.1). Кабель 1 соединен одним концом с системой съема информации (точка А), а другой - с корпусом (точка В). Рычаг, несущий головки и другие элементы системы съема информации, может вращаться вокруг оси О, перпендикулярной корпусу (угол поворота обозначен  $\phi$ ). С достаточной степенью точности кабель может быть представлен упругим стержнем, концы которого жестко связаны с корпусом в точке В и с рычагом в точке А. Ограничимся исследованием движения кабеля в плоскости  $OYZ$ , параллельной корпусу. Очевидно, что в силу большой кривизны, задача определения положения равновесия кабеля при фиксированном значении угла поворота рычага является геометрически нелинейной.



Таблица 1.

N	Время синтеза уравнений, с	Число арифметических операций	
		+/-	*
10	3.4	524	658
20	15.7	2009	2069
30	48.8	4624	4688
40	128.2	9199	9078

### 3. Методы расчетов

Для расчета положения равновесия кабеля следует решить систему нелинейных алгебраических уравнений

$$Q(q) + G(q)^T \lambda = 0, \quad g(q) = 0 \quad (2)$$

относительно неизвестных значений координат и множителей Лагранжа. Для этого разработан специальный модуль программы “Универсальный Механизм”. Уравнения (2) решаются с использованием метода Ньютона-Рафсона [6]. Матрицы Якоби, необходимые для этой процедуры, определяются численно.

Для расчета собственных частот и форм колебаний кабеля уравнения движения численно линеаризуются в окрестности определенного положения равновесия. Расчет частот произведен с использованием  $QR$ -алгоритма. Формы колебаний определены методом обратных итераций.

### 4. Результаты расчетов

Расчеты проведены для различных значений числа стержней в модели,  $N = 10, 20, 30, 40$ , при следующих значениях параметров:

$$L = 0.05922 \text{ м}, \quad EJ = 1 \text{ Н*м}^2, \quad \mu = 1 \text{ кг/м}, \quad Y_c = 0.0555 \text{ м}, \\ Z_c = -0.01333 \text{ м}, \quad \phi_c = -15^\circ, \quad Y_a = 0.01253 \text{ м}, \quad Z_a = 0.00332 \text{ м}, \quad \phi_a = 4.1^\circ.$$

Здесь использованы обозначения, представленные на рис.1. Единичные значения параметра жесткости  $EJ$  и массы единицы длины кабеля  $\mu$  позволяют производить расчеты в относительных единицах.

Статические формы кабеля, соответствующие его положениям равновесия при различных значениях угла поворота рычага (в градусах), изображены на рис.3.

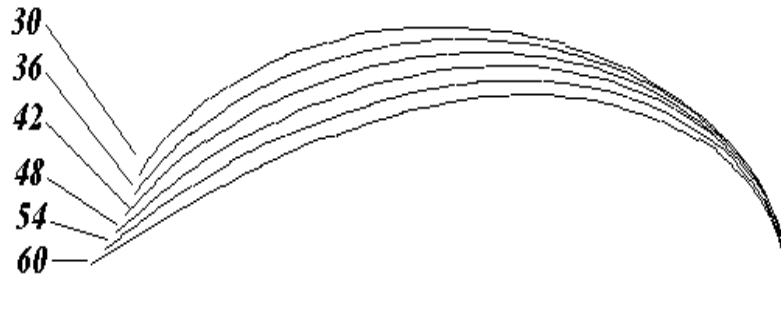


Рис.3

В положении равновесия на оси рычага возникает статический момент, величина которого в зависимости от угла поворота представлена на рис.4. Момент рассчитан в относительных единицах  $T'$ , его действительное значение связано с расчетным соотношением  $T = (EJ) * T'$ .

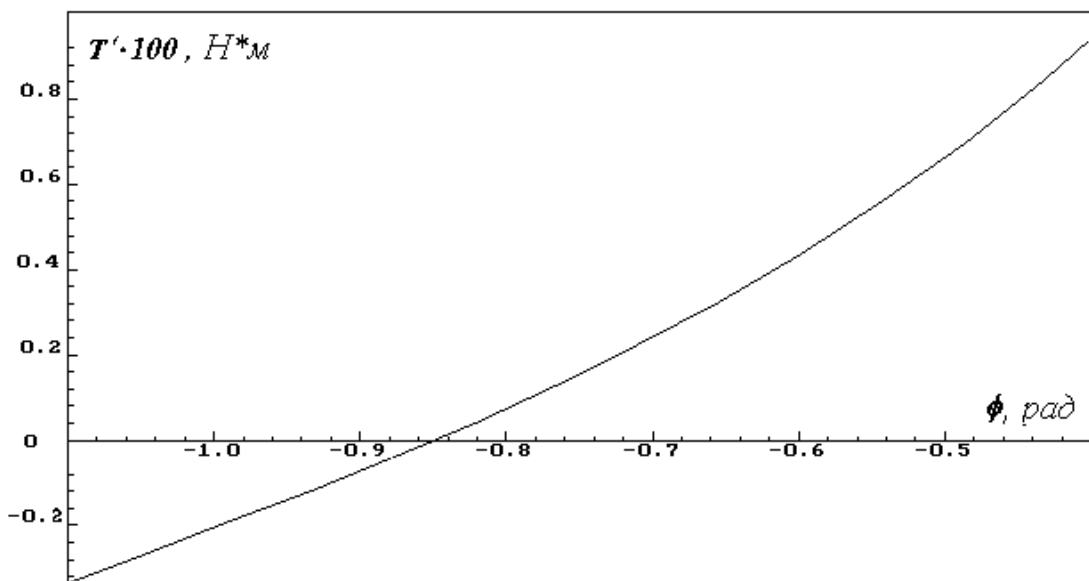


Рис.4

Собственные частоты и соответствующие формы колебаний кабеля определены при отсутствии рассеяния энергии. Значения частот  $\omega'_k$  получены в относительных единицах, переход к действительным частотам осуществляется в соответствии с формулой

$$\omega = 1000 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \omega' \text{ Гц.}$$

Зависимости трех низших частот от угла поворота рычага при различных числах  $N$  стержней в модели приведены в табл.2. Результаты расчетов показы-

вают, что с увеличением числа стержней в модели частоты достаточно быстро стремятся к предельным значениям.

Таблица 2.

Номера частот	N	Угол поворота рычага $\phi, ^\circ$					
		-30	-36	-42	-48	-54	-60
1	10	2.247	2.23	2.22	2.21	2.20	2.18
	20	2.19	2.18	2.175	2.168	2.156	2.138
	30	2.184	2.174	2.166	2.158	2.148	2.130
	40	2.180	2.170	2.162	2.156	2.145	2.127
2	10	4.33	4.44	4.54	4.62	4.68	4.72
	20	4.22	4.33	4.43	4.51	4.57	4.61
	30	4.20	4.31	4.41	4.49	4.55	4.59
	40	4.19	4.30	4.40	4.48	4.54	4.58
3	10	8.34	8.41	8.47	8.50	8.51	8.48
	20	8.08	8.16	8.32	8.26	8.26	8.28
	30	8.02	8.11	8.17	8.21	8.22	8.19
	40	8.00	8.09	8.16	8.19	8.20	8.17

Собственные формы колебаний кабеля при  $\phi = -30^\circ$ , соответствующие первым шести частотам, приведены на рис.5.

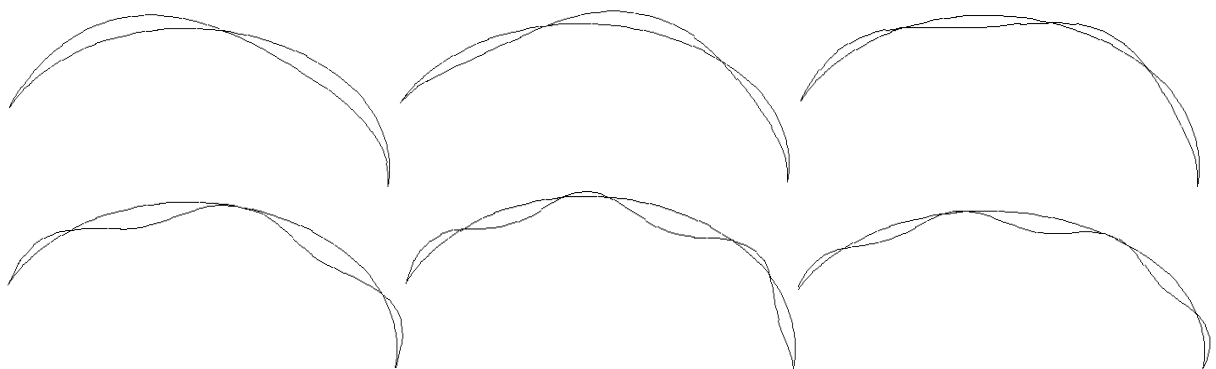


Рис.5

Для анализа чувствительности собственных частот кабеля к его длине произведены расчеты при различных значениях отклонения  $dL$  длины от заданного значения  $L$ . Результаты, представленные в табл.3 при  $\phi = -45^\circ$  показывают,

что неточное задание длины может привести к значительному отклонению расчетных частот от реальных.

Таблица 3.

$dL$ mm	$T'$	$\omega'$									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-2	13.0	2.36	4.63	8.70	13.10	19.14	25.56	33.54	41.95	51.88	62.25
-1	11.24	2.26	4.54	8.43	12.76	18.54	24.81	32.48	40.65	50.20	60.26
0	9.36	2.16	4.44	8.18	12.41	17.98	24.01	31.46	39.39	48.59	58.36
1	7.49	2.07	4.34	7.93	12.07	17.43	23.36	30.48	38.18	47.05	56.53
2	5.58	1.98	4.23	7.69	11.74	16.90	22.67	29.53	37.02	45.57	54.77

### 5. Экспериментальная проверка точности расчетов

Для проверки корректности модели кабеля и методов расчетов проведен эксперимент. Экспериментальная установка представлена на рис.6 и состоит из диска, вращающегося вокруг горизонтальной оси и упругой балки, один конец которой жестко связан с ободом диска, а другой - с опорной поверхностью. Расстояние  $Y_c$  до точки защемления балки и угол заделки  $\varphi_c$  можно изменять. Установка предназначена для экспериментального определения зависимости статического момента на оси диска, а также частот колебаний балки от угла поворота диска при различных положениях точки защемления правого конца балки.

Две первые собственные частоты колебаний балки измерялись стробоскопом с точностью 1-2%.

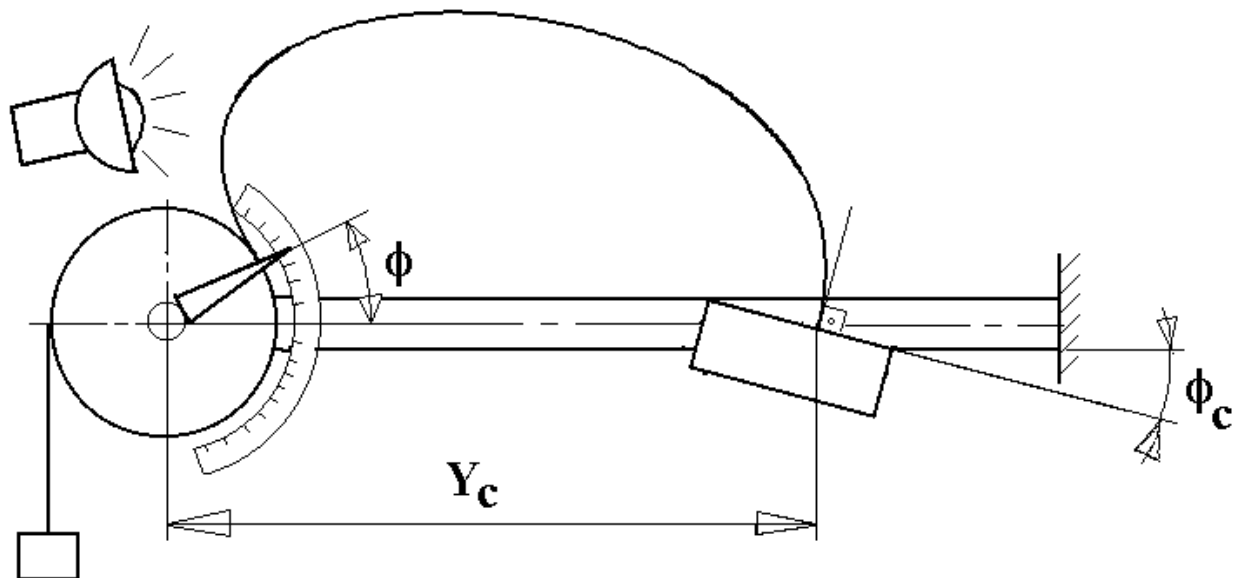


Рис.6

Установка имеет следующие значения параметров в обозначениях основной задачи об упругом кабеле:

$$L = 0.49 \text{ м}, EJ = 0.0428 \text{ Н*м}^2, \mu = 0.0835 \text{ кг/м},$$

$$Y_c = 0.243, 0.293, 0.343 \text{ м};$$

$$Z_c = 0, \phi_c = -15^0, Y_a = 0.0494 \text{ м}, Z_a = 0.009 \text{ м}, \phi_a = 0^0$$

Таблицы, представленные ниже, содержат сравнение экспериментальных ( $T_e$ ) и расчетных ( $T_c$ ) данных по величине момента в заделке и собственным частотам модели при различных значениях расстояния  $Y_c$ .

Таблица 4.

Сравнение экспериментальных и расчетных значений момента, Н\*м

$Y_c = 0.243 \text{ м}$			$Y_c = 0.293 \text{ м}$			$Y_c = 0.343 \text{ м}$		
$\phi$	$T_e$	$T_c$	$\phi$	$T_e$	$T_c$	$\phi$	$T_e$	$T_c$
13.0	0	0.001	0.0	0	0.003	-13.2	0	0.006
20.0	0.075	0.077	7.0	0.075	0.079	-6.0	0.075	0.085
28.3	0.175	0.178	15.0	0.175	0.185	2.5	0.175	0.187
36.0	0.275	0.277	22.3	0.275	0.277	9.5	0.275	0.285
43.0	0.375	0.373	29.0	0.375	0.377	16.0	0.375	0.385

Таблица 5.

Сравнение экспериментальных и расчетных значений частот,  $c^{-1}$

$Y_c = 0.243$ м					$Y_c = 0.293$ м					$Y_c = 0.343$ м				
$\phi$	$\omega_{1e}$	$\omega_{1c}$	$\omega_{2e}$	$\omega_{2c}$	$\phi$	$\omega_{1e}$	$\omega_{1c}$	$\omega_{2e}$	$\omega_{2c}$	$\phi$	$\omega_{1e}$	$\omega_{1c}$	$\omega_{2e}$	$\omega_{2c}$
13.0	15.4	15.7	43.5	43.9	0.0	17.2	17.6	45.0	45.4	-13.0	19.4	19.6	47.1	46.7
25.0	15.7	16.0	42.8	43.0	25.0	17.8	17.8	44.6	44.1	2.0	19.8	19.7	46.0	45.0
40.0	16.6	16.5	42.5	41.8	30.0	18.4	18.2	44.0	42.6	17.0	20.6	20.0	44.8	43.0
50.0	16.9	16.9	42.0	41.0	50.0	19.2	18.8	42.6	41.0	32.0	21.3	20.5	43.2	40.8

Соответствие экспериментальных и расчетных результатов можно охарактеризовать как хорошее.

### Заключение

Проведенные численные и экспериментальные исследования показали, что моделирование упругой балки системой шарнирно связанных абсолютно твердых стержней позволяет с достаточно высокой точностью определять положения равновесия, собственные частоты и формы колебаний балки в геометрически нелинейной постановке.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kruszewski J., Gawronski W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S. Rigid Finite Element Method. Arkady Warszawa. 1975 (польск.).
2. Леонтьев В.А. Оптимальная дискретизация распределенной упругости в расчетных моделях звеньев манипулятора // Тр. 1 научн.-техн. конф. "Роботы и манипул. в экстрем. услов.". Спб.: СПбДНТП. 1992. С. 100-106.
3. Banerjee A.K., Nagarajan S. Efficient Simulation of Large Overall Motion of Beams Undergoing Large Deflection//Multibody System Dynamics. N 1. 1997. P.113-126.
4. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. "Универсальный механизм"- комплекс программ моделирования динамики систем твердых тел. Препр. Ин. прикл. матем. РАН. N 77, 1993.
5. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. Некоторые алгоритмы автоматизированного синтеза уравнений движения системы твердых тел. Препр. Ин. прикл. матем. РАН. N 77, 1994.
6. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование систем тел. Брянск: БГТУ. 1997.