

УДК 531.13

**Д. Ю. ПОГОРЕЛОВ\*, А.Э.ПАВЛЮКОВ, Т.А. ЮДАКОВА, С.В. КОТОВ**\*Брянский государственный технический университет  
Уральский государственный университет путей сообщения**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТЕЛ (\*)**

Рассмотрена математическая модель контактного взаимодействия с трением абсолютно твердых тел в задачах компьютерного исследования динамики систем тел. В основу взаимодействий положена модель контакта типа точка-плоскость. Обсуждаются проблемы оптимизации процесса численного решения жестких дифференциальных уравнений при наличии контакта. В качестве примера использования разработанных подходов приведены методики моделирования клиновых гасителей тележек грузовых вагонов, а также сравнение результатов численного исследования с натурными экспериментами.

В последние десятилетия широкое распространение получили методы компьютерного моделирования динамики технических систем путем представления их системой абсолютно твердых тел. Автоматический вывод уравнений движения, возможность быстрой модификации моделей, весьма высокая точность результатов моделирования систем с большим числом степеней свободы позволили использовать данные методы в самых различных областях науки и техники. Соответствующие программные комплексы используются для исследования динамики робототехнических систем, машин и механизмов, автомобилей, рельсовых экипажей и так далее [1, 2].

Наибольшую сложность при компьютерном моделировании технических систем представляет создание математических моделей силовых взаимодействий тел. При исследовании динамики рельсовых экипажей наиболее сложными являются модели сил взаимодействия колес с рельсом (силы крипа), а в случае автомобиля – модель взаимодействия пневматика с дорогой. Значительную сложность также представляет моделирование контактных взаимодействий тел с трением, при наличии режимов входа в контакт и выхода из него, скольжения и сцепления. При определении режимов входа в состояние контакта и выхода из него требуется учитывать форму поверхностей тел, которая часто является весьма сложной и не может быть описана в параметрической форме с помощью одного гладкого многообразия. Реальные параметры сил контактного взаимодействия (коэффициенты жесткости и диссипации), рассчитываемые с использованием методов конечных элементов, как правило, настолько велики, что уравнения движения соответствующих систем становятся жесткими. Этот факт, наряду с сильной нелинейностью сил, приводит к практической невозможности использования реальных значений параметров при численном интегрировании уравнений из-за дробления шага интегрирования.

---

(\*) Теоретическая часть исследований выполнена при поддержке РФФИ (99-01-00223а) и программы «Университеты России – фундаментальные исследования» (04.01.09)

В данной работе рассмотрена математическая модель контактного взаимодействия пары тел, основанная на контакте набора точек, принадлежащих одному телу, с плоскостью, принадлежащей второму телу (модель контакта типа точка-плоскость). Для ускорения процесса интегрирования уравнений движения с использованием неявных численных методов выведены аналитические выражения для матриц Якоби контактных сил. В качестве примера использования построенных математических зависимостей рассмотрена задача моделирования фрикционных клиновых гасителей тележки грузового вагона. Приведено описание натурального эксперимента по определению количественных характеристик гасителей, а также сравнение результатов численных расчетов и экспериментов, подтверждающее достаточно высокую точность компьютерного моделирования.

### 1. Математическая модель контакта точка-плоскость

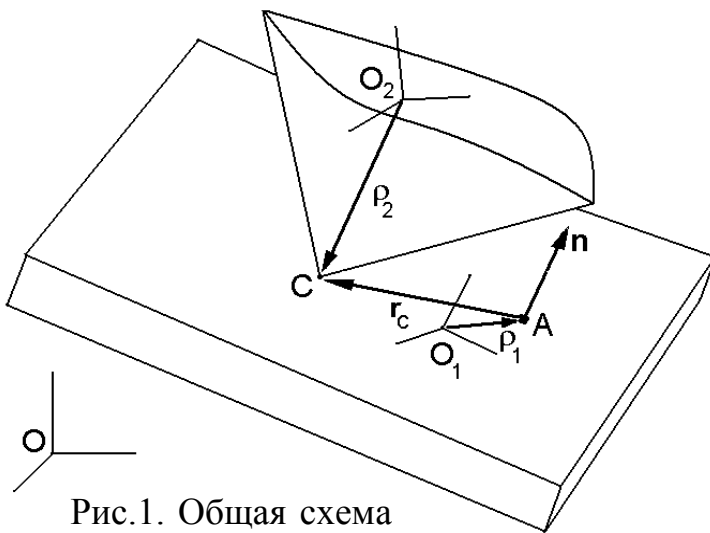


Рис.1. Общая схема контакта

Для описания модели рассмотрим пару взаимодействующих тел, схематично представленных на рис.1. Введем инерциальную систему координат СК0 с началом в точке O, относительно которой исследуется движение объекта, с каждым телом жестко свяжем системы координат СК1 и СК2 с центрами в точках O<sub>1</sub> и O<sub>2</sub>. Телу 1 принадлежит контактная плоскость, а с телу 2 – контактная точка. Для задания плоскости требуются координаты любой ее точки

(точка A на рис.1 задана радиусом-вектором  $\rho_1$ ) и внешняя нормаль  $n$ . Контактная точка задается вектором  $\rho_2$ . Отметим, что эти три вектора являются постоянными в соответствующих СК, связанных с телами. Для записи математических соотношений будем использовать матричный подход [3], в соответствии с которым вектор представляется матрицей-столбцом проекций на оси некоторой СК. Для обозначения СК, в которой заданы проекции векторов, будем использовать верхний индекс – номер системы координат; будем опускать индекс для векторов, представленных в СК0. Таким образом, векторы  $\rho_1^1, n^1, \rho_2^2$  являются постоянными и определяют геометрию контакта точка-плоскость.

Положение контактной точки C относительно точки A можно определить следующей зависимостью:

$$r_c = r_2 + A_{02}\rho_2^2 - r_1 - A_{01}\rho_1^1,$$

где  $r_1, r_2$  - радиусы-векторы точек  $O_1$  и  $O_2$  в СК0;  $A_{01}, A_{02}$  - матрицы направляющих косинусов СК1 и СК2 относительно СК0, используемые для перевода векторов из одной системы координат в другую.

Определим расстояние между контактной точкой и плоскостью как скалярное произведение векторов  $r_c, n$

$$\Delta = n \cdot r_c = n^T r_c. \quad (1)$$

Здесь индекс  $^T$  означает транспонирование.

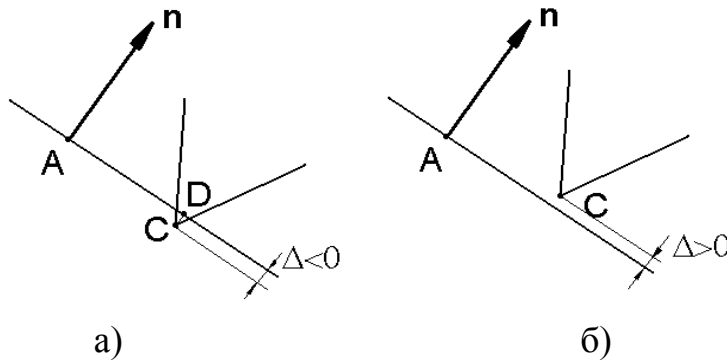


Рис. 2. Условия контакта

Введенный параметр используется для определения факта контакта точки с плоскостью: при  $\Delta > 0$  контакт отсутствует, и контактная сила равна нулю (рис.2а), при  $\Delta < 0$  тела находятся в контакте (рис.2.б), и следует определить значение контактной силы  $F_c$ .

Разложим контактную силу на две составляющие: нормальную реакцию  $N$ , перпендикулярную контактной плоскости, и силу трения  $F_f$ , лежащую в плоскости (рис 3).

$$F_c = N + F_f$$

В матричной форме записи справедливо соотношение

$$F_c = Nn + F_f,$$

где  $N$  – модуль нормальной реакции.

Величина нормальной реакции зависит от глубины и скорости проникновения контактирующих тел  $\Delta, \dot{\Delta}$ , причем опыт моделирования контактных взаимодействий показал, что хорошее совпадение с экспериментальными данными дает простейшая линейная упруго-диссипативная модель силы [4]

$$N = -c\Delta - \mu\dot{\Delta}.$$

Если получаемое значение оказывается отрицательным, нормальная реакция полагается равной нулю (отсутствие прилипания).

Для определения скорости внедрения  $\dot{\Delta}$  вычислим производную от выражения (1).

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= r_c^T \dot{n} + n^T \dot{r}_c = r_c^T \tilde{\omega}_1 n + n^T (v_2 + \tilde{\omega}_2 \rho_2 - v_2 - \tilde{\omega}_1 \rho_1) = \\ &= n^T ((v_2 + \tilde{\omega}_2 \rho_2) - (v_1 + \tilde{\omega}_1 (\rho_1 + r_c))) = n^T (v_{c2} - v_{c1}) = n^T v_{c12}. \end{aligned}$$

Здесь  $v_1, v_2$  - скорости точек  $O_1$  и  $O_2$ ;  $\omega_1, \omega_2$  - угловые скорости тел 1 и 2;  $v_{c1}, v_{c2}$  - скорости точки контакта  $C$  первого и второго тела;  $v_{c12}$  - скорость точки  $C$  тела 2 относительно тела 1.

Знак  $\sim$  используется для обозначения векторного произведения в матричном представлении. Так, выражение  $\tilde{\omega}_2 \rho_2$  в векторной форме записи имеет вид  $\omega_2 \times \rho_2$ . Таким образом, скорость внедрения равна проекции на нормаль к контактной плоскости вектора относительной скорости точки  $C$  второго тела.

Рассмотрим теперь модель силы трения. Для контакта стандартным образом вводятся два режима: скольжение и сцепление. В режиме скольжения сила трения направлена против скорости скольжения точки  $C$  второго тела по плоскости и равна по модулю произведению коэффициента трения скольжения  $f$  на модуль нормальной реакции  $N$ . Скорость скольжения равна проекции относительной скорости  $v_{c12}$  точки  $C$  на контактную плоскость и определяется выражением

$$v_s = v_{c12} - \Delta n = v_{c12} - nn^T v_{c12} = (E - nn^T) v_{c12},$$

где  $E$  – единичная  $3 \times 3$  - матрица; матрица  $E - nn^T$  является оператором проектирования векторов на контактную плоскость.

В результате получим следующую математическую модель силы трения скольжения:

$$F_f = -fNe_s, \quad e_s = v_s / \|v_s\|, \quad (2)$$

причем  $e_2$  - единичный вектор по направлению скорости скольжения.

Прежде чем перейти к построению модели силы трения в режиме сцепления, рассмотрим критерий перехода от режима скольжения к режиму сцепления. Переход осуществляется, когда скорость скольжения меняет свое направление на “противоположное”. При программной реализации этого критерия сравниваются векторы скорости скольжения на текущем и предыдущем шагах интегрирования. Если скалярное произведение данных векторов отрицательно, то происходит переход в режим сцепления, и запоминаются значения вектора силы трения скольжения на предыдущем шаге (обозначим его  $F_g$ ) и вектора  $AD$  (обозначим его  $r_g$ ), причем  $D$  – проекция точки  $C$  на контактную плоскость (рис.2б). В проекциях на оси СК1 вектор  $r_g$  определяется соотношением

$$r_g^1 = A_{10}(r_c - \Delta n) = A_{10}(E - nn^T)r_c.$$

В режиме сцепления сила трения вычисляется в соответствии с формулой

$$F_f^1 = F_g^1 - c_s(r_g^1 - r_{g0}^1) - \mu_s v_s^1, \quad (3)$$

где  $r_g^1$  - текущее значение вектора  $r_g$ , а  $r_{g0}^1$  - его значение в момент перехода от режима скольжения к режиму сцепления.

Таким образом, при переходе к сцеплению точка контакта  $C$  “привязывается” к контактной плоскости линейных упруго-диссипативным элементом.

Сила  $F_g^1$  в формуле (3) обеспечивает непрерывность изменения силы трения при переходе от скольжения к сцеплению. Значения коэффициентов жесткости и диссипации сцепления  $c_s, \mu_s$  при моделировании обычно можно принять равными коэффициентам контактной жесткости  $c, \mu$ .

Режим сцепления заканчивается при достижении силой трения предельного значения, то есть при выполнении условия

$$\|F_f^1\| > f_0 N, \quad (4)$$

где  $f_0$  - коэффициент трения покоя,  $f_0 > f$ .

При выполнении условия (4) на данном шаге интегрирования для силы трения принимается значение в соответствии с формулой (2) и включается режим скольжения.

Выбор значений параметров жесткости и диссипации, входящих в модель контактного взаимодействия, будет обсуждаться ниже. Здесь отметим, что в большинстве случаев использования данной модели для исследования динамики технических систем данные параметры должны принимать весьма большие значения, и уравнения движения становятся жесткими. Чтобы ускорить процесс численного интегрирования жестких дифференциальных уравнений, используются неявные численные методы, требующие построения матриц Якоби уравнений. Исследования, проведенные в работе [5], показали, что с целью уменьшения числа операций при расчете матриц Якоби, можно ограничиться расчетом соответствующих матриц только от наиболее жестких сил, в данном случае - контактных сил.

Вклад отдельной силы взаимодействия тел с номерами 1 и 2 в приближенную матрицу Якоби уравнений движения определяется матричным соотношением

$$J = \begin{pmatrix} \Phi_1^T & \Phi_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\Phi_a, a = 1, 2$ , входящие в это выражение, определяют зависимость скорости полюса  $v_a$  связанной с телом  $a$  СК и ее угловой скорости  $\omega_a$  от обобщенных скоростей  $\dot{q}$ , а также для вариации радиуса-вектора  $\delta r_a$  и бесконечно малого поворота  $\delta \pi_a$  в зависимости от вариаций координат  $\delta q$

$$\begin{pmatrix} v_a \\ \omega_a \end{pmatrix} = \Phi_a \dot{q}, \quad \begin{pmatrix} \delta r_a \\ \delta \pi_a \end{pmatrix} = \Phi_a \delta q.$$

Матрицы  $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$  имеют размер  $6 \times 6$  и определяются математической моделью силы. В приближенной постановке достаточно найти выражения для двух из этих матриц. Действительно, пусть взаимодействие пары тел дает силу  $F$  и момент  $M$ , действующие на тело 2 и приведенные к полюсу  $O_2$ . Тогда на первое тело будут действовать сила и пара

$$F_2 = -F, \quad M_2 = -M - \tilde{r}_{12}F,$$

$$r_{12} = r_2 - r_1,$$

приведенные к полюсу  $O_1$ , или

$$R_2 = C_{12}^T R_1,$$

где

$$R_1 = \begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} F_2 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} E & -\tilde{r}_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если при расчете матрицы Якоби пренебречь производной от матрицы  $C_{12}$ , являющейся малой величиной в случае жестких сил, то справедливы соотношения

$$K_{11} = -C_{12}^T K_{21}, \quad K_{12} = -C_{12}^T K_{22}.$$

Определим явный вид матриц  $K_{21}, K_{22}$  для нормальной реакции. Поскольку сила и момент в данном случае выражаются через нормальную реакцию

$$R_2 = \begin{pmatrix} N \\ \tilde{\rho}_2 N \end{pmatrix}$$

и при приближенном вычислении матрицы Якоби пренебрегается производной от вектора  $\rho_2$ , то следует вывести выражение для вариации силы  $N$ . Сначала рассмотрим вариацию силы при вариациях положений тел  $\delta r_1, \delta r_2, \delta \pi_1, \delta \pi_2$ .

$$\delta N \approx -cn\delta\Delta = -cn(n^T \delta r_c + r_c^T \delta n) = -cnn^T (\delta r_2 - \tilde{\rho}_2 \delta \pi_2 - \delta r_1 + (\tilde{\rho}_2 + \tilde{\eta}_{12}) \delta \pi_1).$$

Совершенно аналогичное соотношение приближенно справедливо для  $\delta N$  при вариации скоростей. Отсюда следуют окончательные аналитические зависимости для искомым матриц:

$$K_{22} = (c\alpha + \mu\beta) \begin{pmatrix} nn^T & -nn^T \tilde{\rho}_2 \\ \tilde{\rho}_2 nn^T & -\tilde{\rho}_2 nn^T \tilde{\rho}_2 \end{pmatrix}, \quad K_{21} = -K_{22} C_{12},$$

где параметры  $\alpha, \beta$  зависят от численного метода и шага интегрирования [5].

Аналогично можно получить аналитические выражения для матриц, соответствующих силе трения. При этом следует учесть, что матрицы будут различными для режимов скольжения и сцепления, причем для режима скольжения они получаются несимметричными.

## 2. Модели фрикционных гасителей колебаний тележек грузовых вагонов

Как показали численные и натурные эксперименты, использование упрощенных аналитических зависимостей для моделирования влияния фрикционных гасителей колебаний тележки с трехэлементной рамой на динамику грузового вагона в пространственной постановке имеет низкую точность. Значительно более точно данное влияние можно учесть, вводя клинья в качестве

отдельных тел, имеющих по шесть степеней свободы, и описывая взаимодействие клиньев с элементами тележки с использованием контактных сил типа точка-плоскость.

На рис.4 приведены некоторые типы клиньев. С каждым клином в компьютерной модели связан набор контактных точек, число и положение которых позволяет учитывать геометрические особенности взаимодействующих поверхностей клина, надрессорной балки и боковой рамы тележки (с их моделями связаны контактные плоскости).

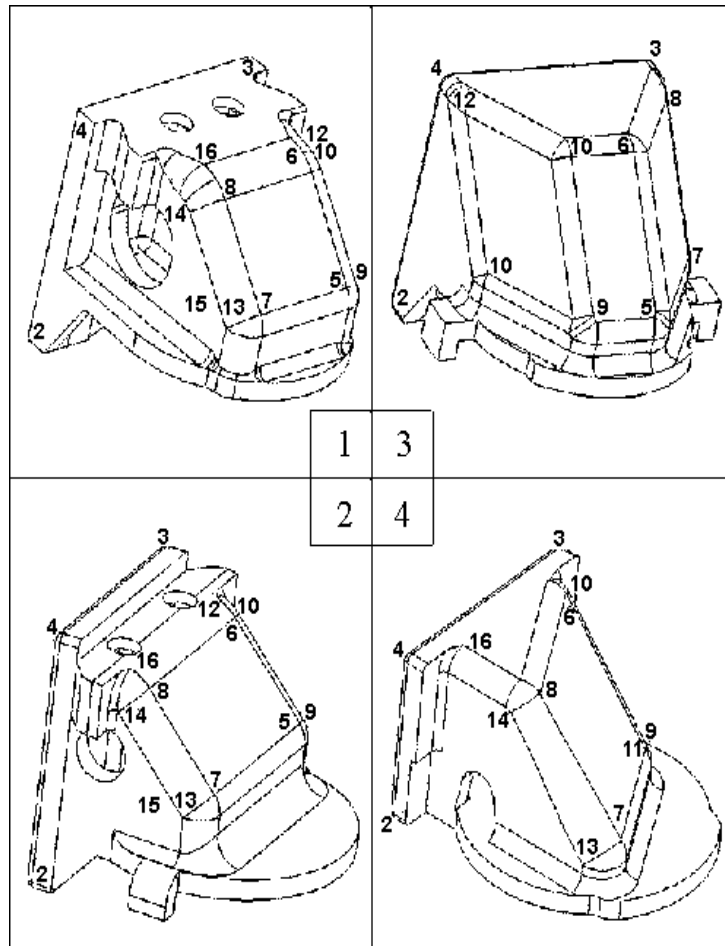


Рис.4. Варианты исследуемых конструкций фрикционного гасителя колебаний тележки повышенной грузоподъемности: 1 - типовой тележки 18-100, 2 –модифицированный, 3 – усеченный, 4 – скошенный; номерами отмечены положения контактных

### 3. Описание эксперимента по определению горизонтальных связей в тележке

Экспериментальные исследования проводились на ГУП «ПО Уралвагон-завод» с участием авторов статьи. Схема проведения испытаний состоит в следующем (рис.5): к подпятнику тележки прикладывается вертикальная нагрузка. После этого создается нагрузка в горизонтальной плоскости домкратами на боковые рамы тележки в противоположные стороны.

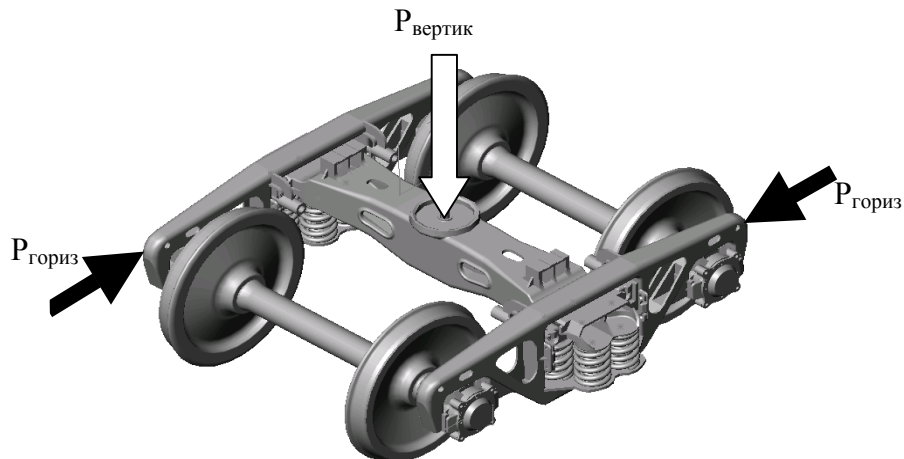


Рис.5. Схема приложения нагрузок при испытаниях для исследования силовых связей в горизонтальной плоскости

При испытаниях тележка устанавливается таким образом, что исключается контакт колес с рельсовым основанием и выполняется свободный поворот осей. В подпятник тележки также устанавливается опора, содержащая подшипник для исключения сил сопротивления в узле при повороте балки в горизонтальной плоскости. При сдвиге боковых рам измеряется угол поворота надрессорной балки  $\alpha$ , сдвиг боковых рам и усилие сдвига рам. По результатам измерений строятся графики зависимости момента сдвига рамы тележки от угла поворота надрессорной балки:  $M = f(\varphi)$ .

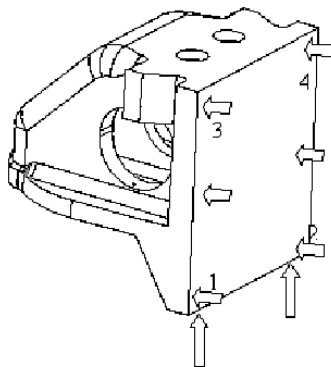


Рис.6. Схема расположения датчиков

Для проверки соответствия разработанной математической модели контактного взаимодействия фрикционного гасителя колебаний реальным процессам, происходящим в гасителе колебаний на контактных поверхностях, а также проверки адекватности выбранных параметров контакта были проведены экспериментальные и теоретические исследования характера распределения сил нормального давления и трения на контактных поверхностях. Схема точек, по которым при испытаниях производились измерения на вертикальной стенке фрикционного демпфера тележки, показана на рис.6.

#### 4. Идентификация параметров модели и сравнение численных расчетов с экспериментом

Для сравнения результатов эксперимента с расчетными данными из общей математической модели грузового вагона была выделена подсистема, имитирующая условия эксперимента. Выделенная модель базируется на следующих положениях:

- колесные пары могут только поворачиваться вокруг вертикальной оси  $z$  (имитация поворотных опор стенда);
- кузов может перемещаться только по вертикальной оси ( $z$ ), трение в пятнике исключено (имитация приложения вертикальной нагрузки при эксперименте через шарнир);
- к боковым рамам приложены силы (по диагонали), вызывающие перекося тележки с определенным углом поворота надрессорной балки от первоначального положения вокруг оси  $z$ .

Процедура параметрической идентификации в данном случае сводится к отысканию оценок параметров математической модели  $c$  и  $\mu$ , которые обеспечивают наилучшую близость расчетных значений момента сил сопротивления сдвигу  $M_{p_i}$  и экспериментальных значений  $M_{э_i}$ , полученных при одних и тех же значениях углов поворота  $\varphi$ . В качестве критериев количественной меры близости модели и оригинала используются максимальные  $I_{\max}$ , средние  $I_m$  или среднеквадратические  $I_{\sigma}$  величины погрешностей рассогласования расчетных и экспериментальных значений, то есть

$$I_{\max} = \max |M_p - M_{э}|; \quad I_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (M_{pk} - M_{эk}); \quad I_{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (M_{pk} - M_{эk})^2},$$

где  $k$  - число измерений одной величины.

Общая схема идентификации в данном случае представлена на рис.7. На схеме  $\varphi$  - входная переменная,  $I_k$  - функция цели идентификации,  $\varepsilon_k$  - заданный уровень ошибки идентификации для каждой пары сравниваемых  $k$ -х значений. Значение  $\varepsilon_k$  было принято  $0,1M_{эk}$ .

На этапе итерации оцениваемых параметров реализовывалась нестрогая эвристическая процедура, содержащая элементы адаптивного случайного поиска и спуска, использующая априорную информацию. Экспериментальные и расчетные зависимости момента сопротивления сдвигу тележки от угла поворота надрессорной балки сравнивались при вертикальной нагрузке на подпятник, эквивалентной загрузке вагона брутто (45 кН).

Поиск начинается с задания начальных значений и проведения расчетов с данными параметрами. Начальное значение коэффициента контактной жесткости  $c$  подбирается таким образом, чтобы парциальная частота контактных колебаний была достаточно большой (в несколько раз больше, чем характерные частоты системы), а статическая деформация в контакте – малой. Коэффициент

диссипации  $\beta$  можно вычислить по заданной доле от критического демпфирования. В этом случае изменение коэффициента жесткости (например, увеличение в сто раз) не приводит к значительным изменениям в динамических процессах системы [4]. В частности, при расчете контактной жесткости клин-балка и клин-рама данные параметры рассчитываются по формуле

$$c = \frac{P_0}{f_{st}}, \quad \mu = 1,2\sqrt{mc}.$$

Здесь  $P_0$  – статическое значение силы, действующей на клин со стороны поджимающей его пружины;  $f_{st}$  – значение статической деформации в отдельной точке контакта под действием силы  $P_0$  (при моделировании вагона выбрано значение  $f_{st}=0,03\text{мм}$ );  $m$  – масса клина; демпфирование контакта составляет 0,6 от критического.

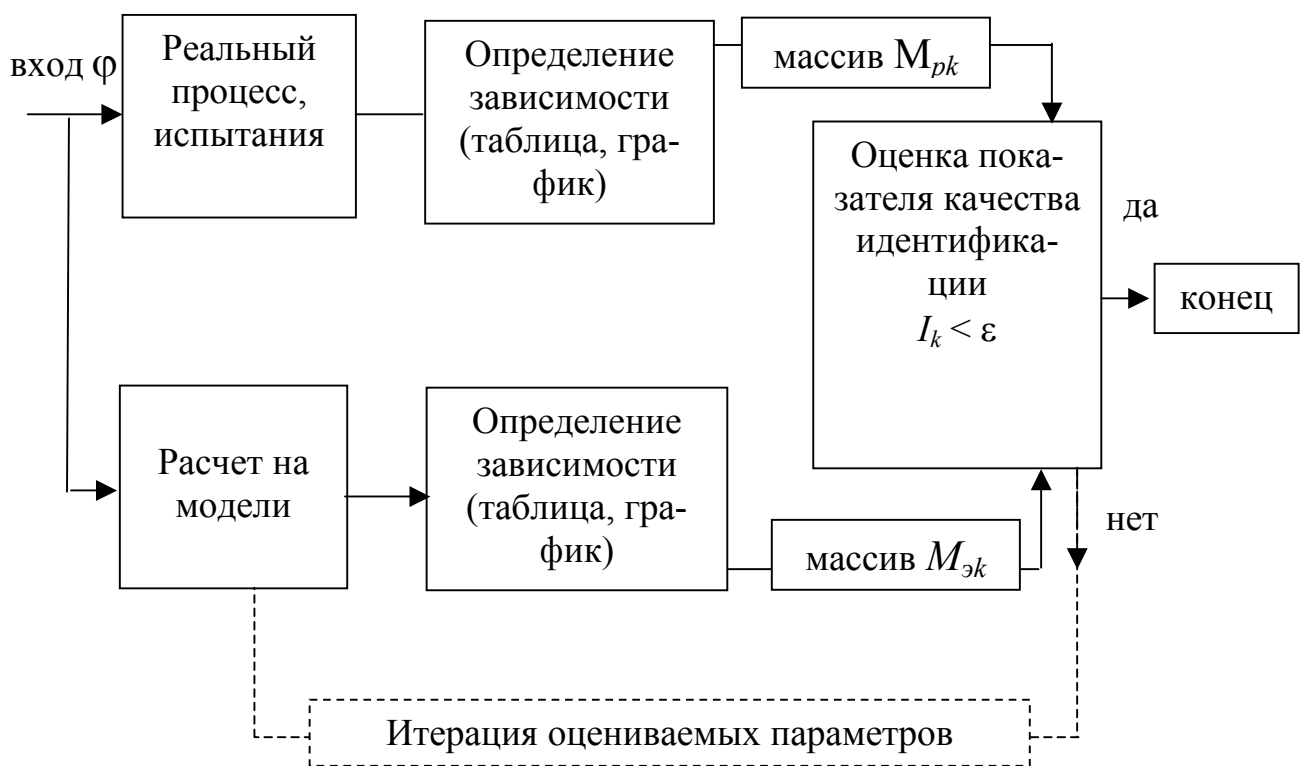


Рис.7. Логическая схема процесса идентификации

При данных значениях параметров парциальная частота контакта в одной точке контакта более 150 Гц, что почти на два порядка выше основных колебаний системы вагон-путь.

Затем определяется направление поиска посредством случайных шагов в большую или меньшую сторону от начальных значений параметров. После определения направления поиска осуществляется спуск в выбранном направлении, при этом величина шага спуска задается из соображений опытного и интуитивного характера. Итерационный процесс прекращается при достижении условия  $I_k < \varepsilon$  для каждого значения  $M_{\varepsilon k}$ .

Для оценки качества проведенной идентификации и соответствия модели реальному объекту в контексте выполнения данного вида испытаний тележки были выполнены тестовые расчеты и испытания. Задача поставлена была таким

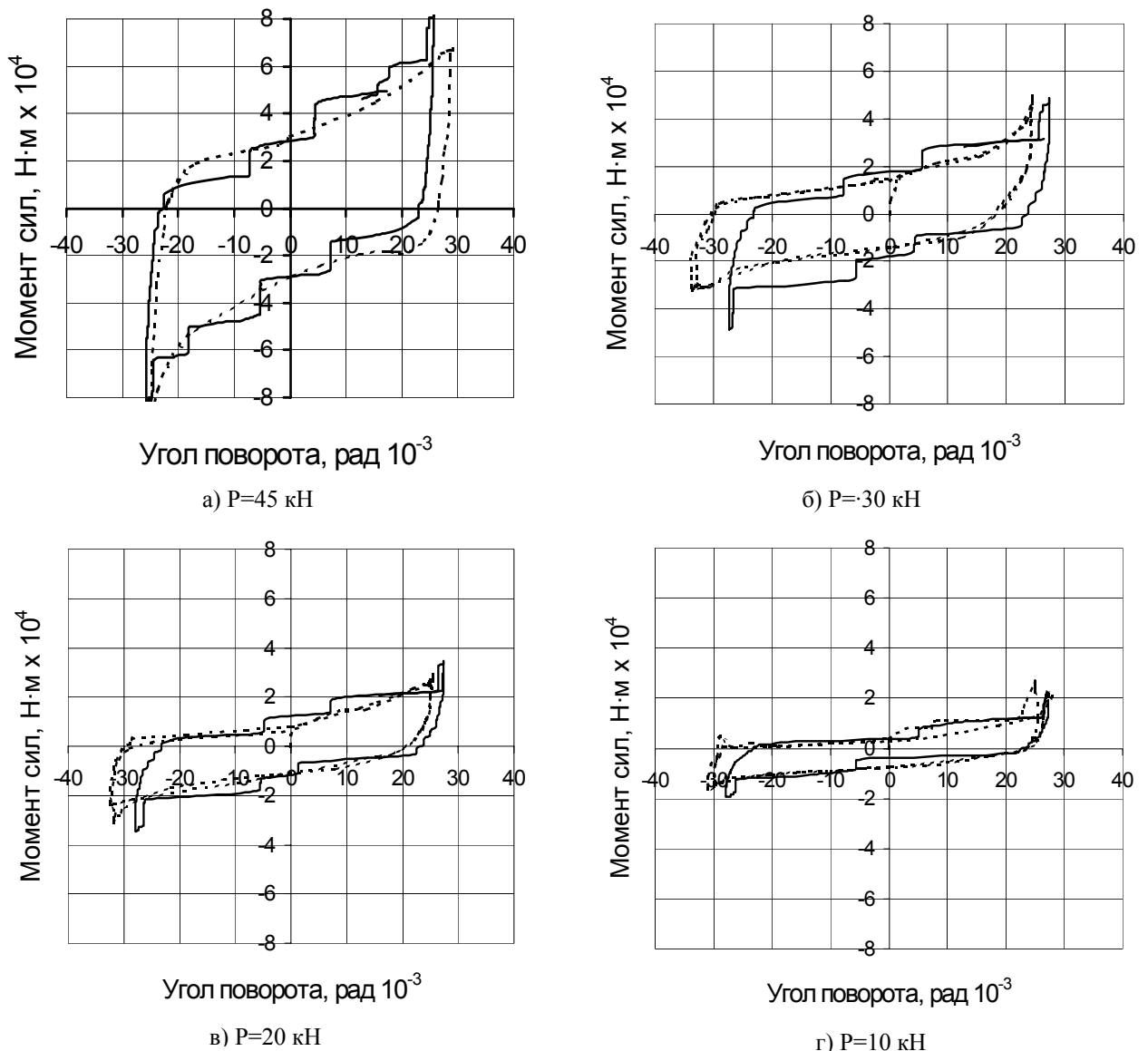


Рис.8. Сравнение экспериментальных и расчетных зависимостей момента сопротивления сдвигу рамы тележки от угла поворота наддрессорной балки при различных вертикальных нагрузках на подпятник; пунктирная линия – эксперимент, сплошная - расчет

образом - к подпятнику тележки прикладывалась вертикальная нагрузка  $P$  с различными значениями: 10, 20, 30, 45кН (брутто); на каждой нагрузке производился сдвиг боковых рам и выполнялись измерения. Результаты тестов, которые отражают сравнение экспериментальных и расчетных данных, приведены на рис. 8.

Анализ графиков показывает хорошую качественную и количественную сходимость результатов для системы, включающей в себя нелинейности в виде

сухого трения (максимальное расхождение по площади петли гистерезиса составило 12 %).

Для сравнения зависимости контактных сил на боковой поверхности клина от вертикального перемещения, полученных с использованием компьютерной модели, с экспериментальными в компьютерную модель были внесены следующие изменения:

- наложены ограничения на связи, вызывающие перекося тележки;
- из ненагруженного состояния (статический прогиб пружин близок к нулю) к наддрессорной балке приложена периодическая сила, вызывающая прогиб пружин вплоть до значения, равного динамическому.

При моделировании для упрощения вычислений на вертикальной стенке фрикционного гасителя исследовались четыре точки 1,2,3,4 (рис. 6). Результаты численных экспериментов, проведенных на модифицированной математической модели, сопоставлялись с данными экспериментальных исследований. Сравнение зависимостей (рис.9-12) показывает согласованность данных, полученных различными путями. Так, в соответствии с графиком зависимости изменения суммарной силы трения от прогиба (рис.12) максимальное расхождение данных составило на этапе нагрузки 9 %, на этапе разгрузки - 10,2 %. Максимальные расхождения значений нормальных сил (рис. 11) составили 11 % для суммарных сил по двум точкам 3 и 4 и 16 % - для суммарных сил по двум точкам 1 и 2.

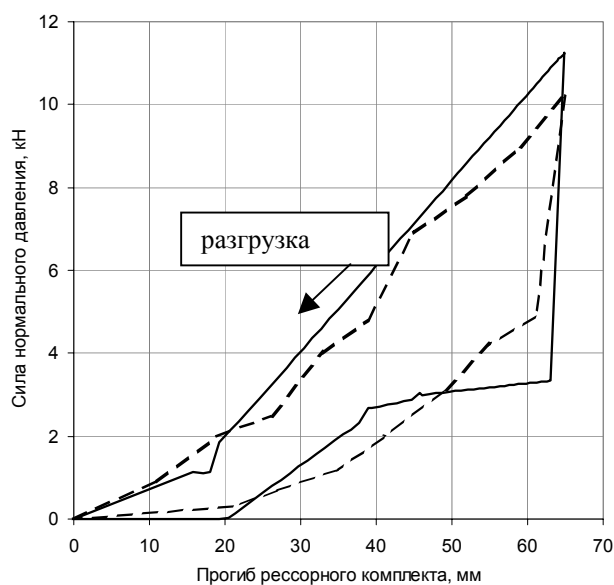


Рис.9. Зависимость силы нормального давления клина на планку от прогиба рессорного комплекта (суммарная по точкам 1,2)

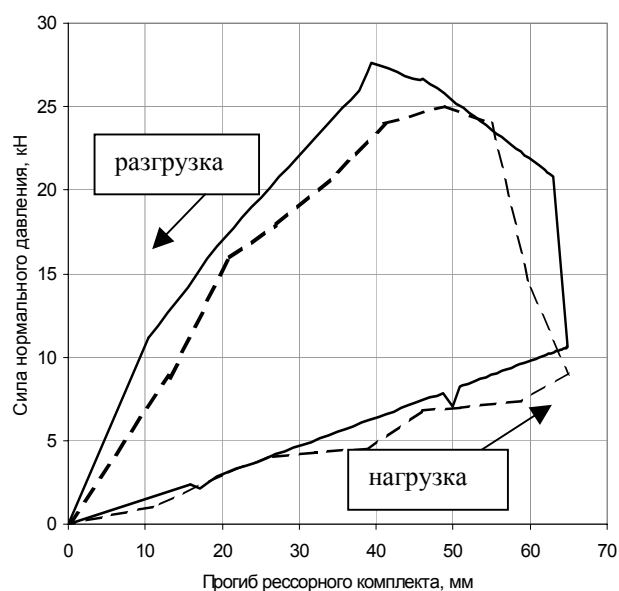


Рис.10. Зависимость силы нормального давления клина на планку от прогиба рессорного комплекта (суммарная по точкам 3,4)

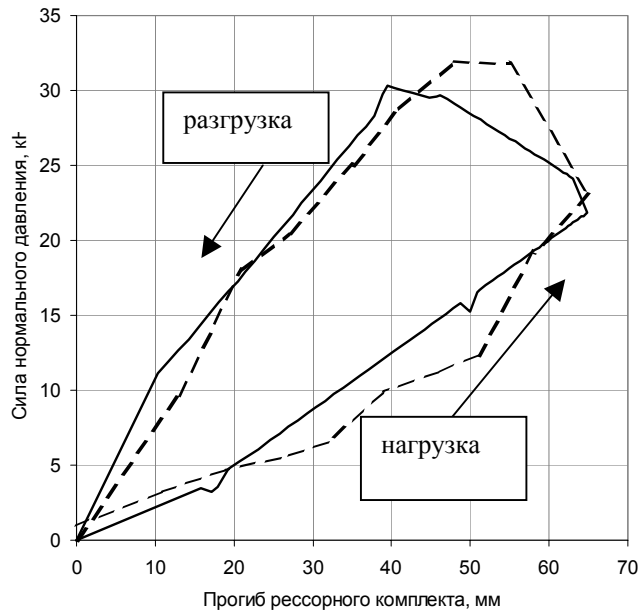


Рис. 11. Зависимость суммарной силы нормального давления клина на планку от прогиба рессорного комплекта

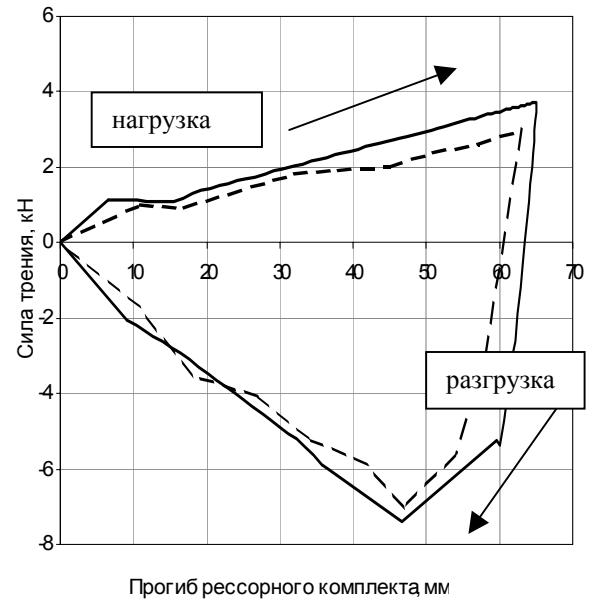


Рис. 12. Зависимость силы трения от прогиба рессорного комплекта (суммарная по клину)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schiehlen W. (Ed.) Multibody Systems Handbook. - Berlin: Springer Verlag, 1990.
2. Schiehlen W. (Ed.). Advanced Multibody System Dynamics – Simulation and Software Tools. - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1993.
3. Виттенбург И.С. Динамика систем твердых тел. - М.: Мир, 1980.
4. Pogorelov D. Simulation and parameter identification of a contact problem. ZB-105. Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart, 1998. -14p.
5. Pogorelov D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling// Numer. Algorithms. - 1998. - V.19. - P.183-194.