



# Механическая система как объект моделирования

---

Руководство пользователя

2010

В данном разделе рассматриваются общие определения и понятия, необходимые для успешной работы с программным комплексом «Универсальный механизм». Данный раздел можно рассматривать как научное введение в программный комплекс.

## Оглавление

<b>2. МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КАК ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ .....</b>	<b>2-4</b>
<b>2.1. Моделирование механических систем.....</b>	<b>2-4</b>
<b>2.2. Система твердых тел.....</b>	<b>2-5</b>
<b>2.3. Шарниры.....</b>	<b>2-10</b>
2.3.1. Связность системы и понятие шарнира.....	2-10
2.3.2. Описание шарниров различных типов.....	2-12
2.3.2.1. Поступательный и вращательный шарниры.....	2-12
2.3.2.2. Шарнир с шестью степенями свободы .....	2-14
2.3.2.3. Обобщенный шарнир.....	2-17
2.3.2.4. Кватернионный шарнир .....	2-20
2.3.2.5. Внутренний шарнир тела.....	2-21
2.3.2.6. Связь в виде невесомого стержня .....	2-22
2.3.2.7. Сопряжения.....	2-23
2.3.2.8. Шарнир постоянной скорости.....	2-25
2.3.3. Граф системы. Замкнутые кинематические цепи.....	2-27
<b>2.4. Уравнения движения .....</b>	<b>2-28</b>
<b>2.5. Теоретические основы расчета начальных условий для систем с замкнутыми кинематическими цепями .....</b>	<b>2-29</b>
<b>2.6. Силовые элементы.....</b>	<b>2-32</b>
2.6.1. Силы тяжести.....	2-33
2.6.2. Шарнирные силы.....	2-34
2.6.3. Биполярные силы.....	2-35
2.6.1. Скалярный момент .....	2-36
2.6.2. Типы скалярных сил.....	2-37
2.6.2.1. Линейная модель силы .....	2-37
2.6.2.2. Фрикционная модель силы.....	2-37
2.6.2.3. Упруго – фрикционная модель силы .....	2-38
2.6.2.4. Упруго – фрикционная сила 2.....	2-40
2.6.2.5. Упруго-диссипативный элемент .....	2-43
2.6.2.6. Поточечная модель силы.....	2-44
2.6.2.7. Модель силы - выражение.....	2-44
2.6.2.8. Рессора Фанчера .....	2-44
2.6.2.9. Модель силы - внешняя функция.....	2-45
2.6.2.10. Гистерезис .....	2-46
2.6.2.11. Удар.....	2-49
2.6.2.12. Библиотека (DLL) .....	2-50
2.6.2.13. Список сил.....	2-51
2.6.3. Обобщенный линейный силовой элемент.....	2-52
2.6.4. Контактные силы.....	2-54
2.6.4.1. Тип точка-плоскость (точка – Z-поверхность) .....	2-54
2.6.4.2. Контакт точка-кривая .....	2-57
2.6.4.3. Другие типы контактных сил .....	2-59

2.6.5.	3D контакт.....	2-60
2.6.6.	Специальные силы.....	2-61
2.6.6.1.	Зубчатое зацепление.....	2-61
2.6.6.2.	Комбинированное трение.....	2-63
2.6.6.2.1.	Режим без фиктивного тела.....	2-64
2.6.6.2.2.	Режим с фиктивным телом без ограничений.....	2-67
2.6.6.2.3.	Режим с ограничением для фиктивного тела.....	2-70
2.6.6.2.4.	Режим с ограничением для тела 2.....	2-71
2.6.6.3.	Кулачок.....	2-73
2.6.6.4.	Пружина.....	2-73
2.6.6.5.	Зубчатая рейка.....	2-75
2.6.6.6.	Сайлент-блок.....	2-76
2.6.7.	T-силы.....	2-77
2.6.8.	Анализ свойств силового элемента в частотной области.....	2-78
<b>2.7.</b>	<b>Методика расчета параметров контакта.....</b>	<b>2-79</b>
<b>2.8.</b>	<b>Подсистемы.....</b>	<b>2-84</b>
2.8.1.	Метод подсистем.....	2-84
2.8.2.	Стандартные подсистемы.....	2-86
2.8.2.1.	Стандартная подсистема – колесная пара.....	2-86
2.8.2.2.	Стандартные подсистемы – подвески автомобиля.....	2-86
2.8.2.3.	Стандартная подсистема - гусеница.....	2-86
2.8.2.4.	Стандартная подсистема – балласт.....	2-87
2.8.3.	Примеры составных объектов.....	2-87
2.8.3.1.	Составной объект – многозвенный физический маятник.....	2-87
2.8.3.2.	Составной объект – динамически несвязанные подсистемы.....	2-88
2.8.3.3.	Составной объект – стенд для динамических испытаний.....	2-88
2.8.3.4.	Составной объект – тепловоз ТЭ116.....	2-89
2.8.3.5.	Пример составного объекта – поезд.....	2-91
<b>2.9.</b>	<b>Линеаризация уравнений движения и линейный анализ.....</b>	<b>2-92</b>
2.9.1.	Уравнения равновесия и их решение.....	2-92
2.9.2.	Расчет частот и собственных значений.....	2-92
<b>2.10.</b>	<b>О размерностях.....</b>	<b>2-92</b>
<b>2.11.</b>	<b>Синтез уравнений движения механической системы их анализ.....</b>	<b>2-93</b>
<b>2.12.</b>	<b>Открытость комплекса и программирование в среде UM.....</b>	<b>2-93</b>

## 2. Механическая система как объект моделирования

В данном разделе рассматриваются общие определения и понятия, необходимые для успешной работы с программным комплексом «Универсальный механизм». Более подробные, но и более сложные сведения об объекте исследования – механической системе и математическом аппарате ее исследования содержатся в научном руководстве.

### 2.1. Моделирование механических систем

Рассмотрим физический маятник, то есть абсолютно твердое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр тяжести. Это – один из простых примеров механической системы. Любой человек может представить мысленно движение маятника и скажет, что он совершает колебательное движение. Однако далеко не каждый сможет сразу записать математическую формулу, которая называется уравнением движения маятника, а тем более решить это уравнение. Все-таки это доступно, скажем, студентам младших курсов естественных факультетов университета. Если учесть силу сопротивления воздуха, то исследование движения доступно уже только студенту старшего курса. А если к одному маятнику прицепить снизу второй, то точное аналитическое решение уравнений движения становится недоступным математику – профессионалу. Что же можно сказать о более сложных системах, содержащих десятки, сотни, тысячи тел?

В таком случае наиболее эффективным является использование численных методов моделирования объекта, включающих:

- автоматизированный вывод (синтез) уравнений движения;
- численный анализ уравнений движения;
- обработку результатов анализа уравнений движения и представление их в удобной для исследователя форме.

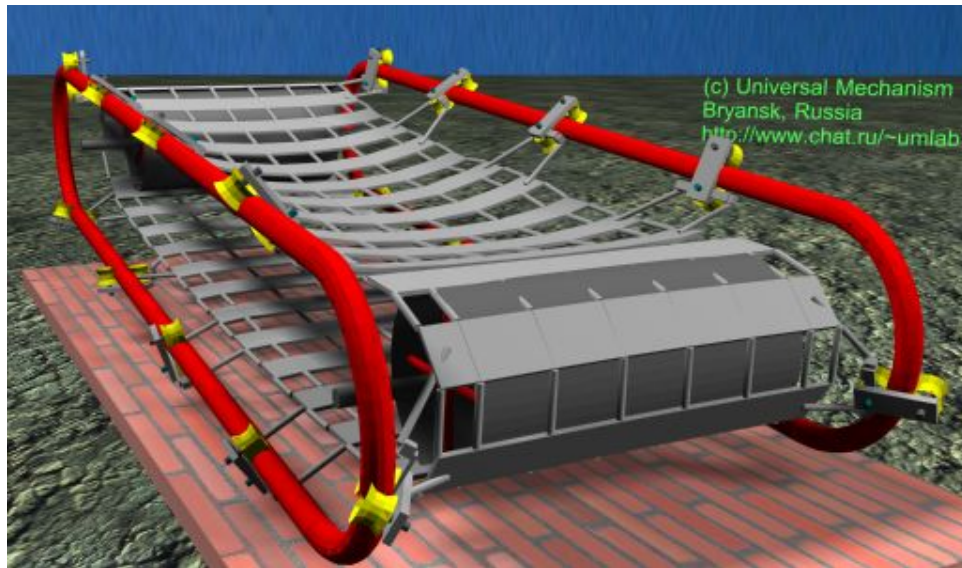
Существует много подходов к анализу уравнений движения, причем выбор конкретного из них в значительной степени определяется особенностями моделируемого объекта. Это может быть численное интегрирование уравнений для объекта, совершающего сложное пространственное движение (например для манипулятора робота). Для системы, звенья (тела) которой совершают малые движения около фиксированного в пространстве положения, часто используется определение собственных значений и собственных векторов. Значительную информацию для поведения некоторых систем можно получить, решая задачу об устойчивости движения в окрестности положения равновесия или стационарного движения.

Представление результатов анализа уравнений движения объекта наиболее удобно с использованием средств машинной графики. К таким средствам можно отнести анимацию движения (мультипликацию) и построение графических зависимостей переменных на экране дисплея.

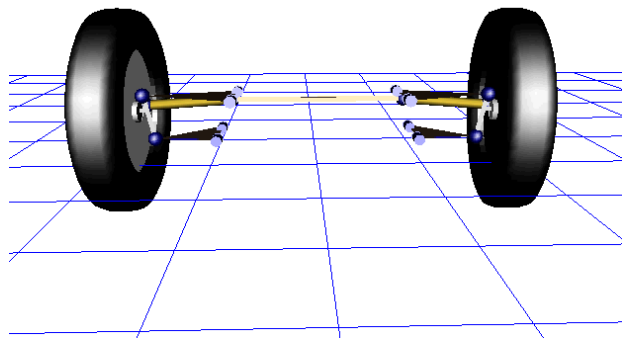
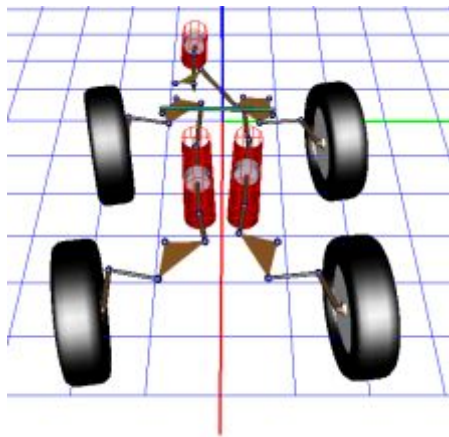
Изучая свойства механической системы, исследователь должен иметь возможность легко изменить ее конфигурацию, упростить или, наоборот, усложнить, изменить параметры (например размеры звеньев или какие-либо коэффициенты в выражении сил). При изменении конфигурации объекта обычно изменяются уравнения движения. Если двойной физический маятник превратить в тройной, то уравнения изменятся полностью. В этом случае имеет большое значение насколько быстро выводятся уравнения движения. Оперативное изменение параметров задачи возможно без повторного вывода уравнений движения, если уравнения выводятся в полной символьной форме, а соответствующие параметры входят в них в виде идентификаторов.

Для решения таких проблем, а также многих других задач и создан программный комплекс УМ.

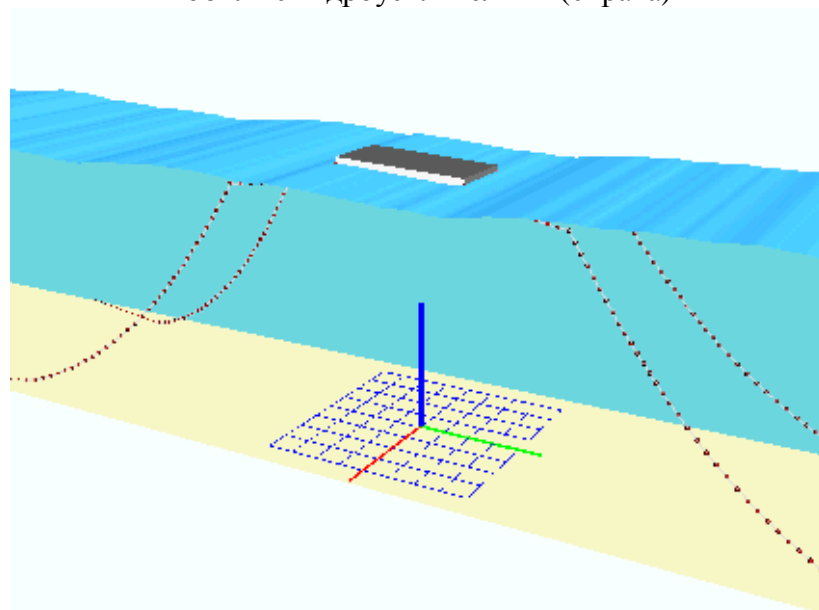
## 2.2. Система твердых тел



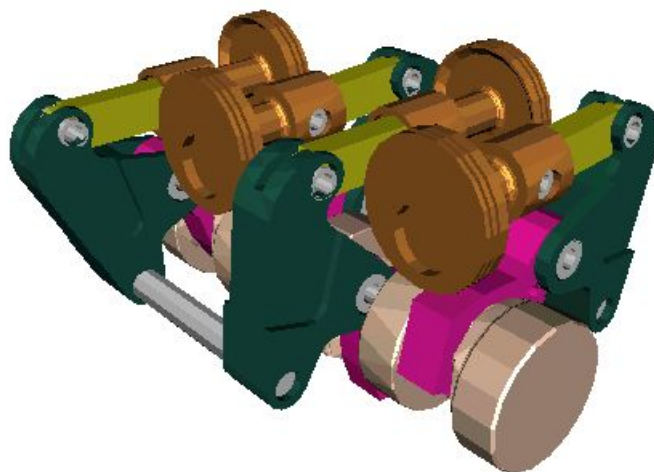
Ленточный транспортер с подвесной лентой



Подвеска автомобиля с двумя поперечными рычагами (слева); подвеска грузового автомобиля с гидроусилителями (справа)



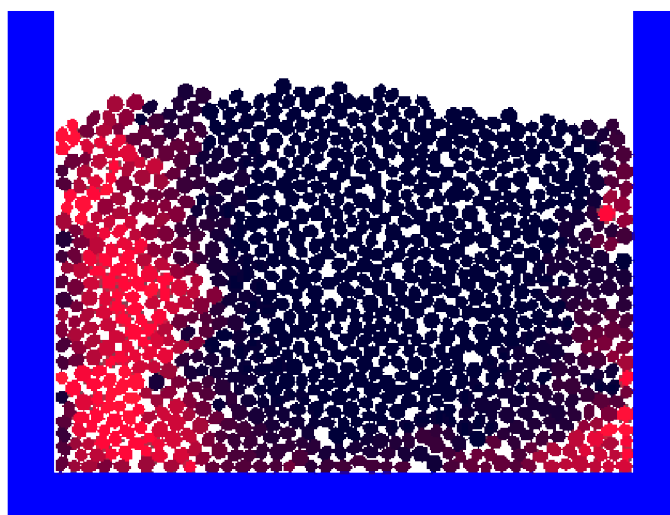
Морская платформа с якорными цепями



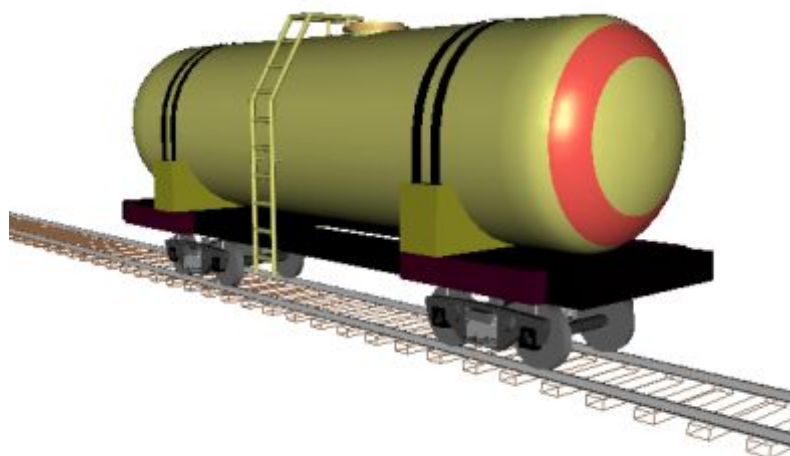
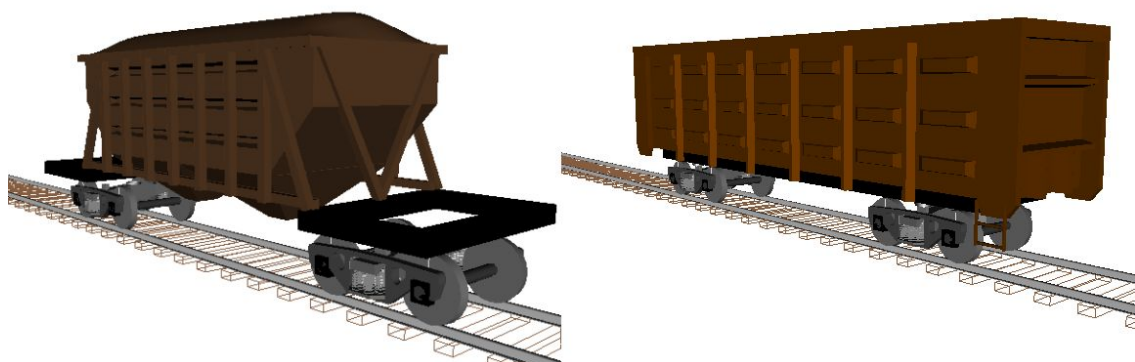
Механизм детандера



Модель гусеничного транспортера



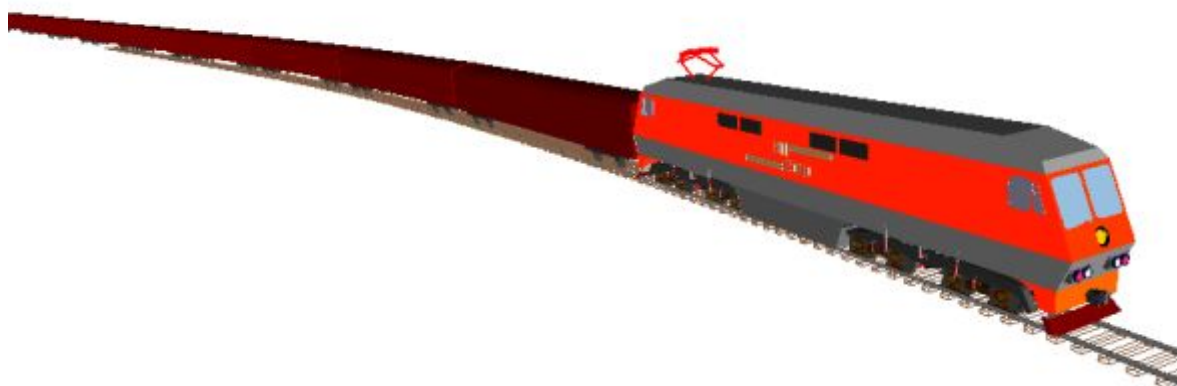
Щебеночный балласт как система тел



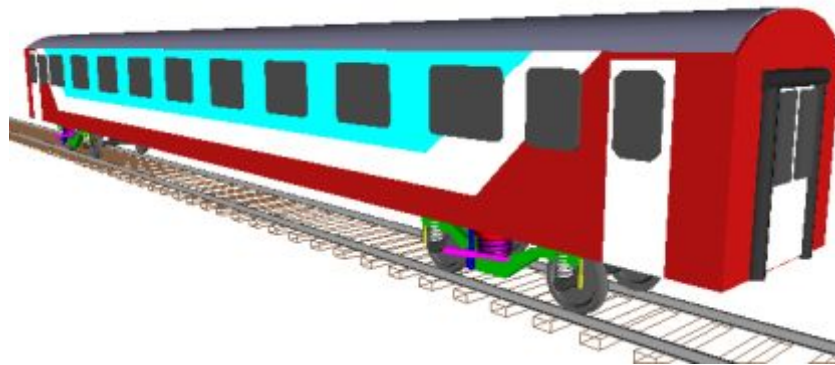
Модели грузовых вагонов



Электровоз ЭП200



Модель поезда



Модель пассажирского вагона

Рис. 2.1. Примеры систем тел

Объектами применения УМ являются системы абсолютно твердых тел (СТТ). Тела системы могут быть как несвязанными друг с другом, так и связанными посредством шарниров и силовых элементов (Рис. 2.1). В частном случае тела могут быть материальными точками.

Движение СТТ исследуется по отношению к *базовому телу* (базе), под которым будем понимать некоторую инерциальную систему координат. Во многих случаях такая система координат может быть с достаточной точностью связана с поверхностью Земли. Базовое тело считается неподвижным и поэтому не включается в исследуемую систему, но оно активно используется при ее описании. Для базовой системы координат используется обозначение СК0. Обычно разделение конкретного объекта на отдельные тела не представляет проблем. Например, двойной физической маятник состоит из двух тел, а манипулятор робота Puma – из четырех. В некоторых случаях деформируемое тело, например упругая балка, может быть представлено как СТТ. Для этого балку расчленяют на отдельные тела, каждое из которых является абсолютно твердым. Отдельные тела связываются шарнирами с безынерционными упругими элементами.

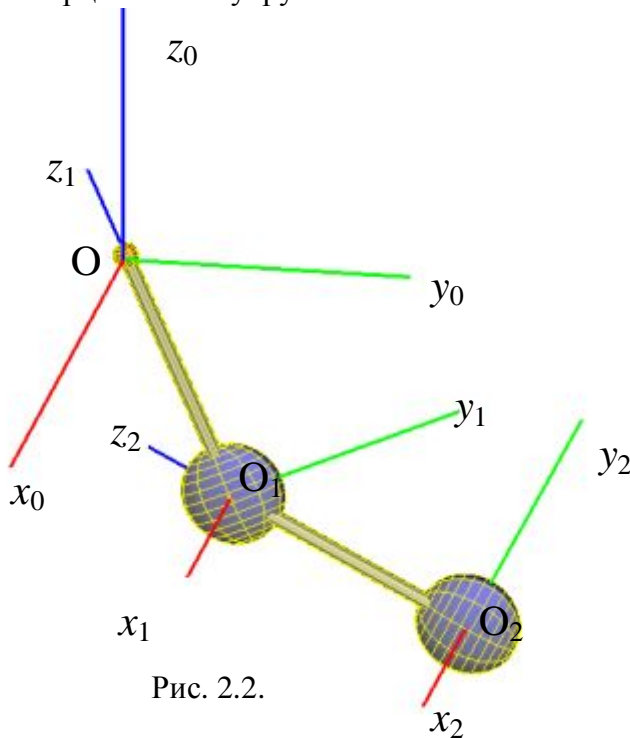


Рис. 2.2.

Для математического описания движения системы с каждым телом связывается прямоугольная декартова система координат (СК), начало которой помещается в любую точку тела, а оси жестко связаны с телом. Таким образом, тело является неподвижным относительно этой СК, и координаты всех его точек постоянны. Вообще говоря, ориентация осей по отношению к телу может быть выбрана произвольным образом, но уравнения движения будут несколько более компактными, если оси являются главными осями инерции. В дальнейшем мы будем говорить об этих системах как о *связанных системах координат* (СК) и использовать для них обозначение СК[номер тела], на-

пример, СК1 – СК, связанная с телом номер 1. В частном случае, когда тело имеет оси симметрии, оси связанной СК удобно (но не обязательно) направить по осям симметрии.

В качестве примера рассмотрим модель двойного физического маятника, состоящего из двух однородных стержней, соединенных вращательным шарниром и прикрепленных посредством шарнира к неподвижной опоре (**Рис. 2.3**). Оси шарниров параллельны, поэтому движение системы происходит в плоскости, однако в УМ все СК – трехмерные. Базовая СК  $Ox_0y_0z_0$  имеет началом точку  $O$ , совмещенную с центром шарнира. Связанные с телами СК  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  имеют начала отсчета в центрах масс, а оси направлены по осям симметрии тел.

## 2.3. Шарниры

### 2.3.1. Связность системы и понятие шарнира

Предполагается, что моделируемая система твердых тел является *связной*, то есть каждое тело в системе связано посредством шарнира, по меньшей мере, с одним другим телом системы или с базовым телом. Это очень важное условие, автоматически контролируемое программой. Каким же шарниром и с чем связано единственное тело, свободно движущееся в пространстве? И зачем это нужно? Ясно, что для описания положения тела в пространстве достаточно знать положение связанной с ним СК относительно базовой СК. С точки зрения математики, для этого достаточно задать положение начала отсчета и ориентацию связанной СК относительно базовой СК, выразив их через некоторые переменные, называемые координатами. В УМ с этой целью используются зависимости от координат радиус-вектора центра масс и матрицы направляющих косинусов (матрицы поворота). Для описания положения одного тела относительно другого используется понятие «шарнир». То есть фраза «описать положение тела относительно базовой СК» эквивалентна выражению «вести шарнир между данным телом и базовым».

Большая часть шарниров, реализованных в УМ, допускают описание положения одного тела относительно другого путем введения *шарнирных координат*. Естественно, при таком подходе шарнир можно ввести между любой парой тел, как кинематически связанных, так и несвязанных. Если пара тел связана шарниром в обычном смысле этого слова, например вращательным шарниром, то его задание в смысле УМ предполагает, что будет описано положение одного тела относительно другого, а именно, положение связанной СК одного тела относительно связанной СК другого тела, и введены шарнирные координаты, то есть переменные, описывающие это положение. Полный набор координат для всего объекта при этом получается простым объединением локальных шарнирных координат. Такое описание шарниров происходит в программах ввода исходных данных и в значительной мере автоматизировано. При этом не обязательно, чтобы существовал шарнир, связывающий *каждое* тело с базой, достаточно, чтобы для каждого тела существовала цепочка попарно связанных тел, по которой можно добраться до базового тела. В этом и заключается обязательное условие *связности* моделируемого объекта.

По условию связности также требуется, чтобы шарниры в цепочке были не произвольными, а конкретных типов. Всего в настоящее время в УМ предусмотрены обобщенные модели шарниров следующих типов:

- вращательный;
- поступательный;
- шарнир с шестью степенями свободы;
- обобщенный;
- кватернионный;
- внутренний шарнир тела, основанный на шарнире с шестью степенями свободы;
- связь в виде невесомого стержня;
- сопряжения;
- шарнир постоянной скорости.

Первые четыре типа шарниров (вращательный, поступательный, шестистепенной и обобщенный) принадлежат к одной группе. Они имеют в программе единое внутреннее представление и определяют кинематические пары с различным числом поступательных и вращательных степеней свободы (от нуля до шести). Первые три типа шарнира могут быть эквивалентным образом описаны с помощью шарнира обобщенного типа. Кватернионный шарнир часто используется для введения координат тела, свободно движущегося в пространстве, а также сферического (шарового) шарнира. Шарнир в виде невесомого

стержня и сопряжения не вводят координаты, а лишь ограничивают относительное движение пары тел.

Ограничения, связанные с выводом уравнений движения в символьной форме требуют, чтобы для каждого тела системы существовала цепочка (путь), соединяющая его с базовым телом. Этот путь должен содержать лишь шарниры, которые однозначно определяют положение одного тела в паре относительно другого при заданных значениях шарнирных координат (все приведенные выше типы, за исключением стержня и сопряжений). Это дает возможность описать положение связанной СК любого тела системы относительно базовой СК в зависимости от шарнирных координат.

В случае двойного физического маятника для удовлетворения сформулированных требований достаточно ввести два вращательных шарнира: между базовым и первым телом, между первым и вторым.

Внутренним представлением шарниров типов

- вращательный;
- поступательный;
- шарнир с шестью степенями свободы

является шарнир обобщенного типа. В UM50 введена функция преобразования шарниров этих типов к обобщенному типу, что позволяет модифицировать шарнир, вводя дополнительные степени свободы, шарнирные силы, параметризации осей шарниров и т.д. Дополнительная информация содержится в гл. 3 руководства пользователя.

**Пример.** Глава 7, п. *Преобразование типа шарнира. Параметризация оси вращательного шарнира*

### 2.3.2. Описание шарниров различных типов

#### 2.3.2.1. Поступательный и вращательный шарниры

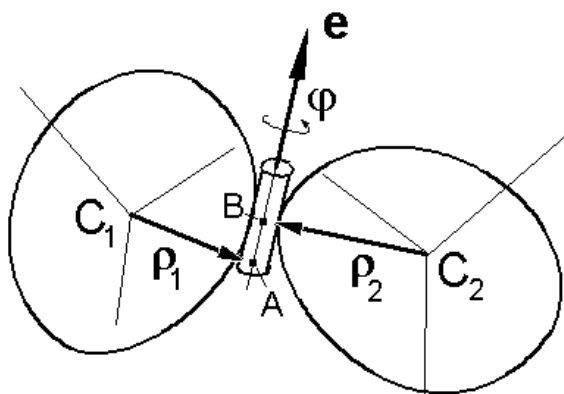


Рис. 2.3

Поступательный и вращательный шарниры позволяют задать кинематическую пару с одной степенью свободы. Каждый из них вводит одну локальную координату (линейную координату  $x$  или угол  $\varphi$ ). Общая схема вращательного шарнира, соединяющего тела 1 и 2 показана на **Рис. 2.3**. Для того, чтобы описать вращательный или поступательный шарнир требуются следующие параметры:

- шарнирный вектор  $e$ , заданный проекциями как в СК1, так и СК2 (вектор не может быть нулевым):  $(e_x^1, e_y^1, e_z^1), (e_x^2, e_y^2, e_z^2)$ ;
- координаты двух точек (шарнирные точки) А, В, лежащих на оси шарнира и связанных с телом 1 (первая точка) и телом 2 (вторая точка):  $(\rho_{1x}^1, \rho_{1y}^1, \rho_{1z}^1), (\rho_{2x}^2, \rho_{2y}^2, \rho_{2z}^2)$ ;
- дополнительные (необязательные) параметры: дополнительный сдвиг вдоль оси шарнира  $x_a$  и дополнительный поворот вокруг оси  $\varphi_a$ .

Вектор  $(e_x^1, e_y^1, e_z^1)$  и точка А  $(\rho_{1x}^1, \rho_{1y}^1, \rho_{1z}^1)$  определяют положение оси шарнира относительно тела 1, а вектор  $(e_x^2, e_y^2, e_z^2)$  и точка В  $(\rho_{2x}^2, \rho_{2y}^2, \rho_{2z}^2)$  – относительно тела 2. Если  $x_a = 0$ , то точки А и В совпадают (имеют одинаковые координаты в СК0).

Параметр  $x_a$  в случае поступательного шарнира и параметр  $\varphi_a$  в случае вращательного шарнира используются для того, чтобы задать относительное положение пары тел при нулевых значениях шарнирных координат  $x$  или  $\varphi$ .

*Положительное вращение соответствует правилу правого винта.*

*Для поступательного шарнира может быть задана шарнирная сила, для вращательного – шарнирный момент, то есть сила и момент, зависящие от шарнирной координаты, ее производной по времени и от времени (п. Типы скалярных сил)*

Локальные координаты для обоих типов шарниров могут быть заданы в виде явных зависимостей от времени  $x(t)$  или  $\varphi(t)$ . В этом случае шарнирные координаты не включаются в список координат моделируемого объекта. Например, если тело 2 вращается равномерно вокруг оси, связанной с телом 1, угол поворота может быть задан функцией  $\varphi(t) = \omega t$ , где  $\omega$  – угловая скорость. Явная зависимость координат от времени часто используется при решении задач кинематики.

Примеры

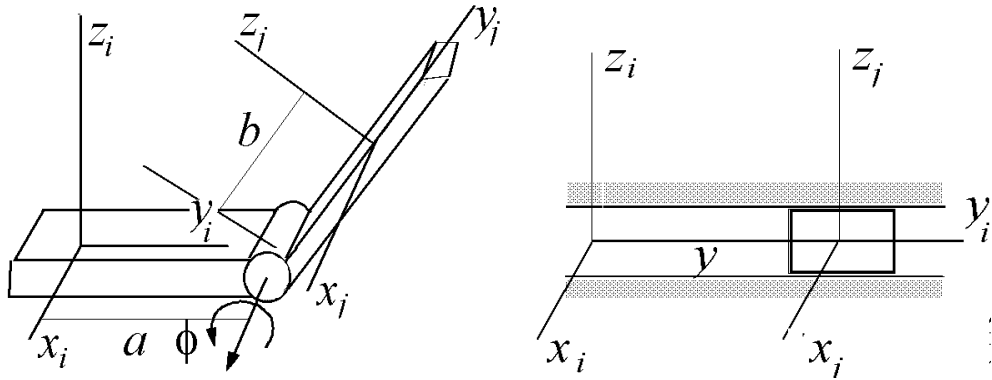


Рис. 2.4. Вращательный и поступательный шарниры

Следующие значения параметров имеют место для вращательного шарнира, изображенного на **Рис. 2.4** слева:

$$\begin{aligned} (e_x^1, e_y^1, e_z^1) &= (1, 0, 0), & (e_x^2, e_y^2, e_z^2) &= (1, 0, 0), \\ (\rho_{1x}^1, \rho_{1y}^1, \rho_{1z}^1) &= (0, a, 0), & (\rho_{2x}^2, \rho_{2y}^2, \rho_{2z}^2) &= (0, -b, 0), \\ x_a = \phi_a &= 0, \end{aligned}$$

и для поступательного шарнира (**Рис. 2.4**, справа):

$$\begin{aligned} (e_x^1, e_y^1, e_z^1) &= (0, 1, 0), & (e_x^2, e_y^2, e_z^2) &= (0, 1, 0), \\ (\rho_{1x}^1, \rho_{1y}^1, \rho_{1z}^1) &= (\rho_{2x}^2, \rho_{2y}^2, \rho_{2z}^2) &= (0, 0, 0), \\ x_a = \phi_a &= 0. \end{aligned}$$

### 2.3.2.2. Шарнир с шестью степенями свободы

Шарниры данного типа очень часто используются для описания кинематических пар с различным числом поступательных и вращательных степеней свободы. Рассмотрим два тела: 1 и 2. Начала связанных с телами систем координат СК1 и СК2 помещены в точки  $O_1$  и  $O_2$ . Введем две дополнительные связанные системы координат СК1А, СК2В с началами в некоторых точках тел А и В (Рис. 2.55). Оси координат дополнительных систем координат могут быть ориентированы относительно СК1 и СК2 произвольным образом. Шарнир вводит координаты, которые определяют положение СК1А относительно СК2В.

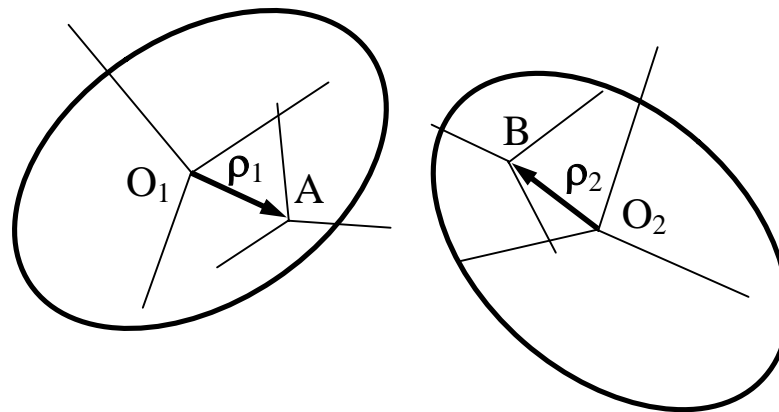


Рис. 2.5. Шарнир с шестью степенями свободы

По умолчанию шарнир имеет шесть степеней свободы: 3 сдвига СК2В относительно СК1А  $x, y, z$  (координаты точки В относительно СК1А) и три угла ориентации СК2В относительно СК1А  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . В этом случае тело 2 движется свободно, и шарнир не вводит ограничений на относительное движение тел (фиктивный шарнир), а вводит координаты тела 2.

Существует 12 способов введения углов ориентации в соответствии с последовательностью поворотов вокруг осей координат  $(x - 1, y - 2, z - 3)$ :

- Euler (3, 1, 3)
- (3, 2, 3)
- (2, 1, 2)
- (2, 3, 2)
- (1, 2, 1)
- (1, 3, 1)
- Cardan (1, 2, 3)
- (1, 3, 2)
- (2, 1, 3)
- (2, 3, 1)
- (3, 1, 2)
- (3, 2, 1)

Каждая из шести степеней свободы может быть “выключена”, то есть сдвиг вдоль или поворот вокруг соответствующей оси может быть запрещен. Подобным образом может быть определено большое число кинематических пар с различным числом степеней свободы.

Следующие параметры необходимы для описания шарнира:

- положения точек А, В  $(\rho_{1x}^1, \rho_{1y}^1, \rho_{1z}^1), (\rho_{2x}^2, \rho_{2y}^2, \rho_{2z}^2)$  и ориентация СК1А, СК2В относительно СК1 и СК2, задаваемая с помощью трех последовательных поворотов;



- Шарниры с одной степенью свободы. Рассмотрим примеры на **Рис. 2.4**. Для вращательного шарнира имеем:

$$\left(\rho_{1x}^1, \rho_{1y}^1, \rho_{1z}^1\right) = (0, a, 0), \quad \left(\rho_{2x}^2, \rho_{2y}^2, \rho_{2z}^2\right) = (0, -b, 0),$$

выключены все поступательные степени свободы, а также углы  $\alpha_2, \alpha_3$  для типа ориентации (1, 2, 3). Для поступательного шарнира:  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  выключены все углы, а также сдвиги  $x, z$ .

**Замечание.** Существуют вырожденные положения СК2В относительно СК1А для любого типа углов ориентации. В вырожденных положениях не могут быть однозначно определены численные значения углов ориентации, следовательно, моделирование движения не может выполняться корректно. Для шести первых типов (оси первого и последнего поворотов имеют одинаковые индексы) вырожденные положения соответствуют  $\alpha_2 = 0, \pi$ . Для шести оставшихся типов вырожденными являются значения  $\alpha_2 = \pm \pi/2$ . Этот факт следует принимать во внимание для фиктивных и сферических шарниров, если при моделировании движения СК2 может иметь произвольную ориентацию относительно СК1. Например, не выбирайте типы углов ориентации с вырождением при  $\alpha_2 = 0, \pi$ , если оси СК2 параллельны осям СК1 в начальный момент времени. В общем случае, если свободное тело может иметь произвольную ориентацию в процессе движения, используйте кватернионный шарнир. Это же касается сферических шарниров.

### 2.3.2.3. Обобщенный шарнир

Большинство кинематических пар может быть смоделировано с помощью шарниров, описанных выше. Однако существует много связей с числом степеней свободы более единицы, которые не могут быть реализованы с их помощью. Приведем список примеров, который далеко не полон:

- шарнир Кардано, в котором оси вращения не перпендикулярны или первая ось вращения не параллельна одной из осей СК1, или вторая ось вращения не параллельна одной из осей СК2;
- шарниры с двумя или большим числом степеней свободы с шарнирными силами и/или моментами, соответствующими отдельным степеням свободы;
- шарниры с двумя или большим числом степеней свободы, реализующие заданное движения (часть или все локальные шарнирные координаты есть явные функции времени).

Все перечисленные случаи, а также все типы шарниров, описанные выше, могут быть реализованы с помощью обобщенного шарнира (ОШ). Математическое описание шарнира можно найти в научном руководстве.

Итак, по определению ОШ – это связь с произвольным числом поступательных и вращательных степеней свободы (от 0 до 6), при которой переход от СК, связанной с одним телом, к СК, связанной с другим, можно описать при произвольном положении пары тел как последовательность элементарных преобразований (ЭП). Каждое ЭП есть либо сдвиг, либо поворот. Введем понятия вектора  $e$  и параметра  $s$  ЭП. Единичный вектор  $e$  имеет направление сдвига или оси вращения (в зависимости от типа ЭП). Параметр  $s$  (то есть величина сдвига или угол поворота) либо постоянный, либо некоторая известная функция времени, либо переменный и должен определяться в процессе численного моделирования движения. В последнем случае параметр  $s$  является локальной шарнирной координатой.

Таким образом, можно указать шесть типов ЭП:

- $tc$  – сдвиг с постоянным параметром;
- $tv$  – сдвиг с переменным параметром;
- $tt$  – сдвиг с параметром, являющимся заданной функцией времени;
- $rc$  – поворот с постоянным параметром;
- $rv$  – поворот с переменным параметром;
- $rt$  – поворот с параметром, являющимся заданной функцией времени.

Рассмотрим примеры ОШ.

1) Вращательная кинематическая пара (**Рис. 2.4**, левый). Описывается тремя ЭП:

$$T_1 = \{tc, e_y, a\}, T_2 = \{rv, e_x, \varphi\}, T_3 = \{tc, e_y, b\}, q_{ij} = [\varphi].$$

Прежде чем перейти к разбору указанных выражений, поясним введенные обозначения.  $T_1, T_2, T_3$  – обозначения последовательных ЭП, далее в скобках указывается тип преобразования, приводится вектор  $e$  и параметр  $s$  преобразования. Для всех типов ЭП, за исключением постоянного сдвига  $tc$ , вектор  $e$  должен быть единичным. Для ЭП типа  $tc$  отсутствует параметр преобразования  $s$ , поскольку величина сдвига непосредственно входит в вектор преобразования. Столбец  $q_{ij}$  содержит список локальных шарнирных координат.

Первое ЭП сдвигает СК1 на расстояние  $a$  вдоль оси  $y$ , при этом ось  $x$  занимает положение оси вращения. Второе ЭП соответствует повороту на угол  $\varphi$  вокруг оси вращения. Последнее ЭП (сдвиг вдоль оси  $y$ ) совмещает СК1 с СК1.

2) Поступательная кинематическая пара (**Рис. 2.4**, правый) может быть задана единственным ЭП

$$T_1 = \{tv, e = (0,1,0), s = y\}, q_{ij} = [s];$$

$s$  – координата, задающая смещение тела  $j$  относительно тела  $i$ .

3) Шарнир Кардано (**Рис. 2.7**). В представленном на рисунке случае задается четырьмя ЭП:

$$T_1 = \{tc, e = (0, a, 0)\},$$

$$T_2 = \{rv, e = (1, 0, 0), s = \alpha_1\},$$

$$T_3 = \{rv, e = (0, 0, 1), s = \alpha_2\},$$

$$T_4 = \{tc, e = (0, b, 0)\},$$

$$\underline{q}_{ij} = [\alpha_1, \alpha_2]^T.$$

ЭП  $T_1$  сдвигает СКІ на расстояние  $a$  вдоль оси  $y$ , при этом ось  $x$  занимает положение первой оси вращения. Второе ЭП, поворот на угол  $\alpha_1$  вокруг оси  $x$  совмещает ось  $z$  осью второго поворота. Затем следует поворот на угол  $\alpha_2$ , при котором оси системы координат становятся параллельными осям СКЈ. Завершающее ЭП, сдвиг вдоль оси  $y$ , приводит к совмещению с СКЈ.

*Обратите внимание, что каждое следующее ЭП производится относительно нового положения системы координат, явившегося результатом предыдущих ЭП. Как правило, ЭП нельзя переставлять местами (то есть элементарные преобразования некоммутативны).*

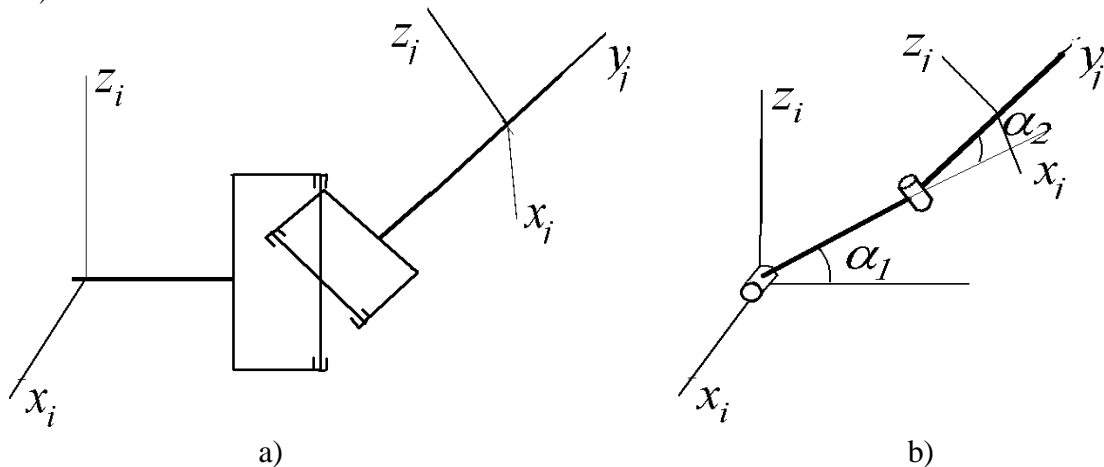


Рис. 2.8. Шарниры с одинаковым набором элементарных преобразований, но разной их последовательностью

Например, если в случае шарнира Кардано на **Рис. 2.7** поменять местами второе и третье ЭП, то получится опять шарнир Кардано, но имеющий совершенно другую кинематическую структуру (**Рис. 2.8a**). Если же поменять местами первое и второе ЭП, то получится вообще не шарнир Кардано, а кинематическая пара с двумя степенями свободы, изображенная на **Рис. 2.8b**. Такая кинематическая пара также реализуема в УМ, но никоим образом не соответствует **Рис. 2.7**. Эти примеры показывают, что понятие шарнира нормального типа не является тривиальным, и при его описании могут возникнуть достаточно серьезные и трудно обнаруживаемые ошибки.

4). Сферический шарнир (**Рис. 2.6**). В приведенном на рисунке примере волчка Лагранжа (симметричное тело, соединенное с опорой посредством сферического шарнира, центр которого лежит на оси симметрии), переход от СКІ к СКЈ осуществляется в два этапа. Сначала развернем СКІ таким образом, чтобы ее ориентация совпала с СКЈ, а затем выполним сдвиг вдоль оси  $z$ . Совмещение ориентации двух систем координат можно достичь путем поворота вокруг трех осей, вводя тем самым три угла ориентации. Для введения углов может быть использована любая из 12 допустимых комбинаций осей поворота, однако в случае волчка Лагранжа принято использовать углы Эйлера. Таким образом, в приведенном примере сферический шарнир описывается четырьмя ЭП:

$$T_1 = \{rv, e = (0, 0, 1), s = \psi\},$$

$$T_2 = \{rv, e = (1,0,0), s = \vartheta\},$$

$$T_3 = \{rv, e = (0,0,1), s = \varphi\},$$

$$T_4 = \{tc, e = (0,0,a)\},$$

$$q_{ij} = [\psi, \vartheta, \varphi]^T$$

Заключительный пример – свободное тело в пространстве. Обобщенный шарнир с шестью степенями свободы и шестью ЭП (три переменных сдвига вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и три переменных вращения вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – углы Эйлера, либо  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – углы Кардано (Крылова), либо последовательность поворотов вокруг трех произвольных осей, причем оси двух последовательных поворотов не должны быть параллельными. Например, в случае углов Кардано имеем:

$$T_1 = \{tv, e = (1,0,0), s = x\},$$

$$T_2 = \{tv, e = (0,1,0), s = y\},$$

$$T_3 = \{tv, e = (0,0,1), s = z\},$$

$$T_4 = \{rv, e = (1,0,0), s = \alpha\},$$

$$T_5 = \{rv, e = (0,1,0), s = \beta\},$$

$$T_6 = \{rv, e = (0,0,1), s = \gamma\},$$

$$q_{ij} = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T.$$

При решении задач кинематики, а также обратных задач управления часто используются ЭП с параметрами в виде явных функций времени. Это означает, что изменение угла поворота или сдвига заранее известно. Например, при решении задачи кинематики кривошипно-ползунного механизма задают движение входного звена – кривошипа, причем угол поворота в шарнире, соединяющем кривошип со стойкой, изменяется по заданному закону, скажем, равномерно.

Шарнирный момент и сила могут быть назначены каждой локальной (шарнирной) координате.

**Замечания.** Недостатком обобщенного шарнира с тремя вращательными степенями свободы является вырождение углов ориентации при некоторых положениях тел в паре. Если тела при движении могут иметь произвольную относительную ориентацию, значения углов могут быть близки к вырожденным. Это приводит к замедлению процесса численного интегрирования уравнений движения из-за автоматического уменьшения шага интегрирования и уменьшению точности моделирования. По этой причине в данных случаях рекомендуется использовать другой тип шарнира – кватернионный, который не имеет вырождения.

### 2.3.2.4. Кватернионный шарнир

Кватернионный шарнир подобен шарниру с шестью степенями свободы или сферическому шарниру (если исключить поступательные степени свободы). Наиболее существенное различие заключается в координатах, определяющих ориентацию СК2В относительно СК1А. В случае кватернионного шарнира это четыре координаты (кватернион)  $q_0, q_1, q_2, q_3$ . Как известно, кватернион не имеет вырождений, но в любой момент времени удовлетворяет тождеству

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Подобно шарниру с шестью степенями свободы, поступательные степени свободы могут быть выключены, однако вращательные степени свободы выключены быть не могут.

Кватернионный шарнир в основном используется для введения координат свободно движущихся тел, а также для задания сферических шарниров (при этом выключаются все поступательные степени свободы).

Если сферический шарнир разрезан (п.2.3.3), то наиболее эффективно с численной точки зрения описывать его кватернионным шарниром.

### 2.3.2.5. Внутренний шарнир тела

Для задания координат тела, свободно перемещающегося в пространстве, можно ввести внутренний шарнир, имеющий шесть степеней свободы. Ориентация тела задается последовательностью поворотов 1,2,3 (углы Кардано-Крылова).

Программа автоматически назначает большой вес внутреннему шарниру. Благодаря этому при введении шарнира или цепочки шарниров, определяющих положение данного тела относительно базы, внутренний шарнир разрезается и **удаляется**. Данное свойство часто используется в подсистемах и в специализированных модулях UM (UM Caterpillar, UM Train3D).

Приведем пример. В модуле UM Caterpillar программа автоматически генерирует гусеничный двигатель в виде подсистемы, причем все элементы движителя, связанные с кузовом, в подсистеме связываются с фиктивным телом, имеющим шесть степеней свободы благодаря внутреннему шарниру. При построении модели гусеничной машины в головном объекте создается тело – кузов с шестью степенями свободы – и две подсистемы – гусеничные движители. Фиктивные тела каждой подсистемы жестко связываются с кузовом, благодаря чему внутренние шарниры фиктивных тел разрезаются и автоматически удаляются.

### 2.3.2.6. Связь в виде невесомого стержня

Данный тип связи соответствует введению невесомого стержня со сферическими шарнирами по концам, соединяющего пару тел. Трение в шарнирах отсутствует. Для описания связи достаточно указать координаты точек прикрепления стержня в связанных с каждым телом СК и ненулевую длину стержня. Длина стержня может быть как постоянной, так и явной функцией времени, что значительно расширяет возможности использования связи при исследовании управляемых механических систем. Например, гидроцилиндр, если пренебречь его инерционными характеристиками, при решении ряда задач кинематики можно представить невесомым стержнем с изменяющейся по известному закону длиной.

### 2.3.2.7. Сопряжения

Сопряжения являются связями, то есть ограничениями на относительное положение и движение пары тел. Понятие «сопряжение» вводится в САПР программах и появилось в UM40 ввиду разработки интерфейсов с основными коммерческими САПР программами, такими как SolidWorks, Autodesk Inventor, КОМПАС. Как правило, сопряжения появляются в моделях UM после импорта сборок из перечисленных САПР программ в случаях, когда не удастся корректное преобразование сопряжений в шарниры, перечисленные выше.

Сопряжения, реализованные в UM, характеризуются следующими данными.

#### 1. Тип сопряжения

- Совпадение
- Соосность
- Параллельно
- На расстоянии
- Под углом

#### 2. Тип и параметры пары многообразий, связанных с каждым из двух тел

- **Точка.** Задается координатами в СК тела.
- **Прямая.** Задается координатой одной точки на прямой и единичным вектором по направлению прямой в СК тела
- **Плоскость.** Задается одной точкой на плоскости и единичным вектором по нормали в СК тела.

#### 3. Параметры, зависящие от типа сопряжения.

- На расстоянии. Задается расстояние между многообразиями.
- Под углом. Задается угол между многообразиями.

Для некоторых типов сопряжений вводятся ограничения на тип многообразия. Например, для типов “соосность”, “параллельность” и “под углом” ни одно из многообразий не может быть точкой.

Пример. Сопряжение типа “совпадение” с многообразиями типа точка для обоих тел, вводит такое же ограничение на относительное движение, что и сферический шарнир. Разница заключается в том, что сферический шарнир, если он не разрезан, вводит три угла, определяющие ориентацию одного тела относительно другого. Сопряжение же всегда вводит уравнения связей, в данном случае их три: координаты заданных точек одного и другого тела совпадают относительно СК0:

$$\eta + A_{01}\rho_1^1 - r_2 - A_{02}\rho_2^2 = 0$$

Здесь  $\eta, r_2$  - радиус-векторы начала отсчета СК первого и второго тела,  $A_{01}, A_{02}$  - матрицы направляющих косинусов СК тел,  $\rho_1^1, \rho_2^2$  - радиусы-векторы совпадающих точек, заданные своими координатами в КС каждого их тел.

Число уравнений связей в зависимости от типа сопряжения и многообразий указано в таблице.

Число уравнений связи для разных типов сопряжения

Тип сопряжения	Типы многообразий	Число уравнений связи
Совпадение	точка-точка	3
	точка-линия	2
	точка-плоскость	1
	линия-линия	4
	линия-плоскость	2
	плоскость-плоскость	3
Соосность	линия-линия	4
Параллельно	линия-линия	2
	линия-плоскость	1
	плоскость-плоскость	2
На расстоянии	точка-точка	1
	точка-линия	1
	линия-линия	3
	линия-плоскость	2
	плоскость-плоскость	3
Под углом	линия-линия	1
	линия-плоскость	1
	плоскость-плоскость	1

### 2.3.2.8. Шарнир постоянной скорости

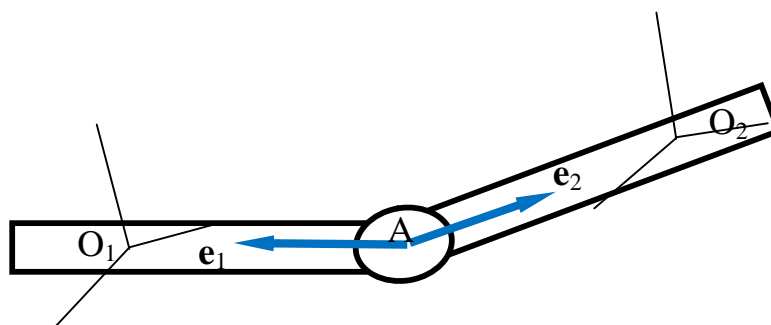


Рис. 2.9. Схема шарнира постоянной скорости

Шарнир постоянной скорости (convel joint) обеспечивает одинаковую угловую скорость вращения двух валов, расположенных под углом друг к другу. Связь соответствует сопряжению точка-точка (совпадение) и равенству с точностью до знака углов поворота пары тел относительно шарнирных векторов.

Шарнир задается координатами центра шарнира (шарнирная точка  $A$ ) в СК каждого из связанных тел и проекциями на оси связанных с телами СК единичных шарнирных векторов  $e_1, e_2$ , Рис. 2.9.

Шарнир вводит *четыре уравнения связи*. Три из них соответствуют совпадению точек  $A$  двух тел. Четвертое уравнение связи обеспечивает равенство с противоположным знаком угла поворота тела 2 вокруг вектора  $e_2$  углу поворота тела 1 вокруг вектора  $e_1$ .

**Замечание.** По сути, конечно, шарнир не обеспечивает постоянную скорость вращения валов. Происхождение названия связано с тем, что при вращении первого вала с постоянной скоростью он, в отличие от кардана, может обеспечить такую же и постоянную скорость наклонному валу.

Для того чтобы модель шарнира была корректной, следует правильно сформировать кинематическую схему валов с помощью шарниров или силовых элементов.

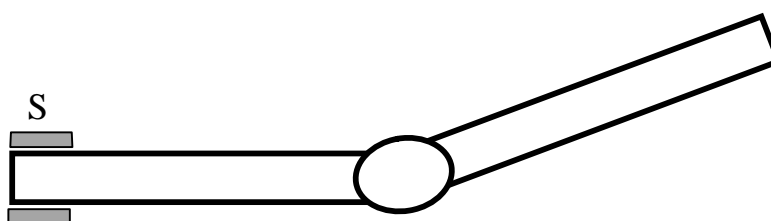


Рис. 2.10. Схема валов с дополнительным вращательным шарниром

Для начала приведем структуру модели, которая приведет к неправильной работе шарнира. Пусть первый вал связан с базой с помощью вращательного шарнира  $S$  (Рис. 2.10), а для второго вала введено шесть степеней свободы относительно базы. Тогда введение шарнира постоянной скорости отнимает у второго тела четыре степени свободы, и оставляет две вращательные степени свободы относительно вала 1. В такой модели второй вал не сохраняет постоянную ориентацию вдоль оси, заданной вектором  $e_2$ , и движение вала будет некорректным.

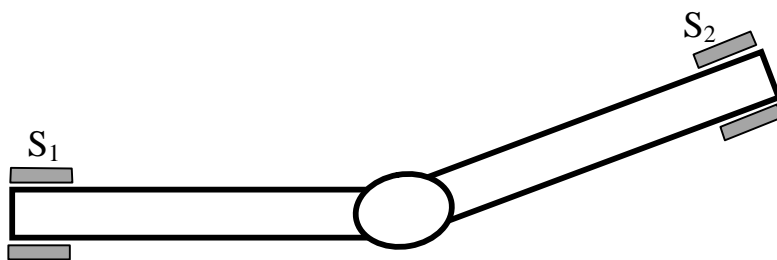


Рис. 2.11. Схема валов с двумя дополнительными вращательными шарнирами

Первый вариант возможной схемы представлен на Рис. 2.11. В этой схеме каждый из валов может вращаться относительно базы, поскольку введены два вращательных шарнира,  $S_1$  и  $S_2$ . Если оси шарниров точно лежат на прямых, заданных векторами  $e_1$ ,  $e_2$  схемы шарнира постоянной скорости, Рис. 2.10, то работа такого механизма будет корректной. Вместе с тем, поскольку второй вал имеет только одну степень свободы, то введение дополнительно шарнира постоянной скорости, вносящего четыре уравнения связей, делает модель статически неопределенной. То есть расчет сил реакций связей становится некорректным. Данная схема неудобна и по другим причинам. Например, если оси шарниров неточно совпадают с осями, задаваемыми векторами  $e_1$ ,  $e_2$ , то получившийся механизм не может двигаться вообще, и перед началом моделирования, скорее всего, пользователь получит сообщение о том, что программа не может решить уравнения связей. Как правило, данная схема также будет некорректной, если валы связаны с разными телами, которые допускают смещение одно относительно другого.

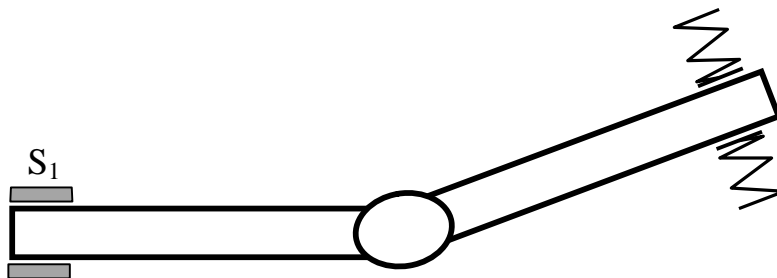


Рис. 2.12. Схема валов с одним вращательным шарниром и одной муфтой

Во многих случаях корректной будет схема, представленная на Рис. 2.12. По сравнению с предыдущим вариантом, для второго тела вводится не вращательный шарнир, а упругая муфта, динамически ограничивающая перемещение второго вала в направлении, перпендикулярном оси вращения. Для моделирования муфты можно использовать специальную силу типа сайлент-блок или обобщенный линейный силовой элемент. Другой вариант: упругие муфты вводятся для обоих тел, и вращательные шарниры не используются вовсе. Пользователь должен аккуратно определить, по каким степеням свободы упругие муфты блокируют перемещения валов.

**ПРИМЕР.** См. Руководство пользователя, глава 7: Примеры моделирования, п. Шарнир постоянной скорости (convel joint).

### 2.3.3. Граф системы. Замкнутые кинематические цепи

Важным этапом исследования сложных механических систем является анализ их структуры, основанный на рассмотрении графа объекта. Вершинами графа являются тела, в том числе базовое, а ребрами – шарниры. При сформулированных ранее условиях связности объекта, граф является связным, если между любыми его вершинами-телами существует, по меньшей мере, один путь. Связность графа следует из того условия, что для каждого тела в системе существует цепочка, соединяющая его с базовым телом. Если между любой парой вершин графа существует единственный путь, то граф является деревом, и мы будем говорить, что механическая система имеет структуру дерева. Если же это условие нарушено, то есть можно найти, по крайней мере, одну пару тел, между которыми существует более одного пути, то граф имеет циклы. В этом случае мы будем говорить, что механическая система содержит замкнутые кинематические цепи (или, короче, замкнутые цепи). Нетрудно понять, что в этом случае в системе существуют тела, связанные с базовым более чем одной цепочкой.

Большинство механизмов имеет замкнутые цепи. Примером может служить кривошипно-ползунный механизм. Исследование объектов с замкнутыми цепями значительно сложнее, чем в случае систем со структурой дерева. Наиболее эффективный прием состоит в том, что условно разрезаются несколько шарниров таким образом, чтобы получить в результате дерево. Число разрезаемых шарниров равно числу независимых циклов в графе объекта. Ясно, что почти во всех случаях выбор разрезаемых шарниров является неоднозначным и поэтому имеется возможность их наилучшего, оптимального выбора, например с целью упрощения уравнений движения, уменьшения их объема и снижения числа арифметических операций при численном моделировании движения. В комплексе УМ этот выбор производится автоматически на основе анализа графа. Оптимальное разрезание базируется на алгоритме Дейкстры поиска минимальных по весу путей от корня графа к каждой вершине-телу.

**Замечание 1.** Пользователь может влиять на выбор разрезаемого шарнира путем назначения большого весового коэффициента шарнира, который следует разрезать.

**Замечание 2.** Разрезанные шарниры с шестью степенями свободы условно удаляются, то есть соответствующие координаты удаляются из списка координат.

## 2.4. Уравнения движения

Уравнения движения систем тел в общем случае можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M(q, t)\ddot{q} + k(q, \dot{q}, t) &= Q(q, \dot{q}, t) + G^T(q)\lambda, \\ h(q, p) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $q$  – основные координаты объекта,  $p$  – вспомогательные координаты (локальные координаты в разрезанных шарнирах);  $M$  – матрица масс,  $k, Q$  – столбцы сил инерции и обобщенных сил;  $\lambda$  – множители Лагранжа, соответствующие силам реакций в разрезанных шарнирах; второе уравнение системы (2.1) – алгебраические уравнения связей или условия замыкания разрезанных шарниров. Матрица  $G$  является матрицей Якоби уравнений связей после исключения из них вспомогательных координат.

«Универсальный механизм» поддерживает два способа синтеза уравнений движения: *символьный* и *численно-итерационный*.

Как показывает практика, символьный способ, совмещенный с применением процедур вынесения за скобки и подстановок, является более эффективным, с точки зрения снижения числа арифметических операций.

Программа синтезирует соотношения кинематики и элементы уравнений движения. Рассмотрим сначала перечень формул кинематики. Пусть  $q = \{q_{ij}\}$  – набор координат системы, являющийся объединением локальных шарнирных координат в основных шарнирах нормального типа (не разрезанных). В символьной форме выводятся зависимости от координат, их производных и времени для следующих величин:

- \* радиусы-векторы центров масс тел,

$$r_i^0 = r_i^0(q, t), \quad A_{i0} = A_{i0}(q, t),$$

- \* векторы скорости центра масс и угловой скорости каждого тела,

$$v_i^0 = D_i^0 \dot{q} + v_i^0, \quad \omega_i^i = B_i^i \dot{q} + \omega_i^i,$$

обратите внимание, что все величины, относящиеся к изменению ориентации тела (угловая скорость, угловое ускорение и так далее), представлены в системе координат соответствующего тела, в то время как векторы, определяющие движение центра масс выводятся в проекциях на оси базовой СК;

- \* матрицы,  $D_i^0$  и  $B_i^i$ , входящие в выражения для скорости центра масс и угловой скорости тела;

- \* величины  $a_i^0$  и  $\varepsilon_i^i$ , входящие в выражения для ускорений центров масс и угловых ускорений,

$$a_i^0 = D_i^0 \ddot{q} + a_i^0, \quad \varepsilon_i^i = B_i^i \ddot{q} + \varepsilon_i^i;$$

- \* уравнения связей для разрезанных шарниров

$$h_k(q, p_k) = 0$$

В символьной форме определяются элементы матриц  $M, k, Q$ , входящих в уравнения (2.1).

Кроме перечисленных выражений формируются некоторые дополнительные соотношения, необходимые для расчета сил реакций связей, определения уравнений связей и обобщенных сил, соответствующих внешним шарнирам и силовым элементам, при использовании метода подсистем.

## 2.5. Теоретические основы расчета начальных условий для систем с замкнутыми кинематическими цепями

Теория численных методов решения дифференциально-алгебраических уравнений утверждает, что численные методы чувствительны к точности задания начальных условий. Это означает, что начальные значения координат и их первых производных по времени должны как можно точнее удовлетворять уравнениям связей. Чтобы понять причины возникновения проблем при автоматическом расчете начальных условий, рассмотрим процедуру формирования и решения уравнений связей.

Пусть  $q_0, p_0$  - некоторые произвольные начальные значения основных и вспомогательных координат. Как правило, начальные условия  $q_0, p_0$  не удовлетворяют уравнениям связей (2.1)

$$h(q,p)=0,$$

являющимся условиями замыкания разрезанных шарниров. Требуется определить поправки  $\Delta q, \Delta p$  таким образом, чтобы новые значения координат удовлетворяли уравнениям связей, то есть

$$h(q_0+\Delta q, p_0+\Delta p)=0. \tag{2.2}$$

В программе реализован итерационный метод Ньютона-Рафсона решения системы нелинейных уравнений (2.2). На каждой итерации нелинейная система линейризуется, и решению подлежит система

$$\begin{aligned} H_q(q^k, p^k)\Delta q^{k+1} + H_p(q^k, p^k)\Delta p^{k+1} &= -h(q^k, p^k), \\ q^{k+1} &= q^k + \Delta q^{k+1}, p^{k+1} = p^k + \Delta p^{k+1}, k=0,1... \\ q^0 &= q_0, p^0 = p_0. \end{aligned}$$

Здесь  $H_q, H_p$  - матрицы Якоби функции  $h$ . Итерация с номером  $k$  выполняется в следующей последовательности. Для каждого разрезанного шарнира строится линейризованное уравнение связей

$$H_{q,i}(q^k, p^k_i)\Delta q^{k+1} + H_{p,i}(q^k, p^k_i)\Delta p^{k+1}_i = -h(q^k, p^k_i), \tag{2.3}$$

в которое входят только часть вспомогательных переменных, а именно – локальные шарнирные координаты. С помощью метода Гаусса из уравнения (2.3) исключаются вспомогательные переменные  $\Delta p^{k+1}_i$  и матричное уравнение (2.3) разделяется на два:

$$\Delta p^{k+1}_i = P_i \Delta q^{k+1} + \delta p^k_i, \tag{2.4}$$

$$G_i^k \Delta q^{k+1} = -g_i^k. \tag{2.5}$$

Далее уравнения (2.5) объединяются в одну систему уравнений

$$G^k \Delta q^{k+1} = -g^k, \tag{2.6}$$

решение которой проводится методом Гаусса с поиском ведущего элемента по строке. При этом приращения координат, соответствующих ведущим элементам, полагаются нулевыми, а остальные координаты получают приращения в соответствии с решением уравнения (2.6). Вычисленные значения  $\Delta q^{k+1}$  подставляются в формулы (2.4), и определяются приращения вспомогательных переменных  $\Delta p^{k+1}_i$ . Если норма полученных приращений координат меньше заданной точности, процесс решения заканчивается, в противном случае выполняется следующая итерация.

Отметим существенную особенность описанного алгоритма: ищется *любое* возможное положение механической системы, удовлетворяющее уравнениям связей. Чтобы предоставить пользователю возможность зафиксировать некоторые координаты (например, необходимо определить конфигурацию кривошипно-ползунного механизма при конкретном значении угла поворота кривошипа, см. Рис. 2.13), имеется возможность *запретить* программе изменять конкретный набор координат в процессе итераций при решении системы уравнений (2.6), то есть *фиксировать* координаты. Это касается только *основных переменных*, то есть не допускается фиксировать *вспомогательные переменные*.

Процесс решения уравнений связей может закончиться неудачей. Если за двадцать итераций условие сходимости не будет выполнено, то появляется сообщение об этом и

предлагается либо прервать процесс, либо выполнить очередные 20 итераций. Укажем основные причины, по которым итерации могут не сходиться и рекомендуемые при этом действия.

1. Уравнения связей не имеют решения

С точки зрения механической системы это означает, что механизм описан неправильно, либо неверно заданы геометрические размеры. Например, если движение переносимого манипулятором груза задано в виде явных функций времени и начальное положение груза не помещено в область достижимости манипулятора, возникнет именно такая ситуация. Другой пример: если для механизма четырехзвенника (см. Рис. 2.13) задать суммарную длину звеньев меньше, чем расстояние между шарнирами, соединяющими звенья с опорной поверхностью, то, очевидно, получим несуществующий механизм. Наконец, если для плоского четырехзвенника задать непараллельные оси вращения в шарнирах, механизм также будет описан неправильно.

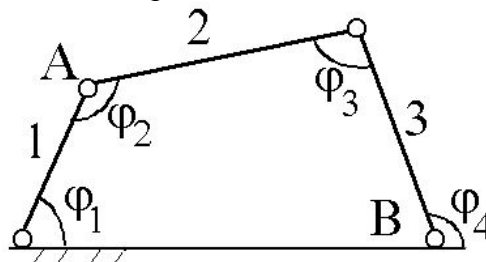


Рис. 2.13. Схема шарнирного четырехзвенника

Программа не может автоматически диагностировать подобные ситуации, а лишь сообщает о том, что итерационный процесс не сходится. В этом случае необходимо вернуться к программе ввода и произвести корректное задание кинематической схемы и геометрических размеров механизма, либо изменить значения некоторых символьных параметров (если это поможет решить проблему).

Например, такая ситуация возникнет, если при описании плоского кривошипно-ползунного механизма оси вращения не параллельны.

2. Уравнения связей не имеют решения при заданном наборе фиксированных основных переменных.

Если пользователь запретил программе изменять значения некоторого набора основных координат при решении уравнений связей, то может возникнуть ситуация, при которой уравнения связей не имеют решения. Здесь возможны два варианта. Во-первых, набор может содержать *зависимые* координаты. Например, если для механизма четырехзвенника, изображенного на Рис. 2.13 зафиксировать не одну, а две координаты, то, скорее всего, уравнения связей не будут иметь решения, поскольку механизм имеет одну степень свободы и любые две координаты являются зависимыми. Во-вторых, если область существования одной или нескольких координат из списка ограничена, то при задании исходных значения вне этой области решение не может быть найдено. Такая ситуация возможна для механизма на Рис. 2.13, если при фиксированном значении угла поворота первого звена  $\varphi$  расстояние между точками А и В больше суммарной длины звеньев 2 и 3.

3. Неудачный выбор начального приближения для итерационного процесса

Как известно, решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона-Рафсона наиболее эффективно при удачном подборе начального приближения  $q_0, p_0$ . При неудачном выборе возможны следующие ситуации.

- Итерации не сходятся. Попробуйте несколько раз продолжить выполнение итераций, и если решение не найдено, подберите значения координат, близкие к точным.
- Найдено решение, которое вас не устраивает. Данная проблема связана с неоднозначностью решения системы нелинейных уравнений. Например, при фиксирован-

ном значении угла  $\varphi$  поворота первого звена механизма на Рис. 2.14 существует две конфигурации, одна из которых изображена штриховой линией. Выбор значений координат, близких к точным, поможет решить эту проблему.

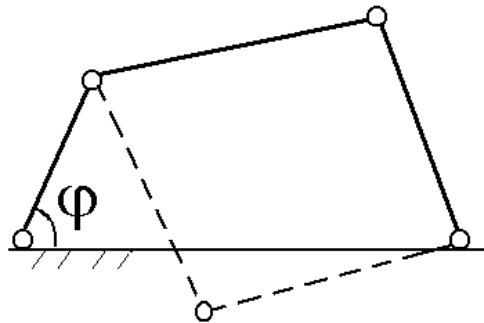


Рис. 2.14. Шарнирный четырехзвенник: различные конфигурации

- При заданных значениях  $q_0, p_0$  происходит вырождение уравнений связей, то есть понижается ранг матрицы  $G^l$  в системе уравнений (2.6). Для механизма на Рис. 2.14, при условии, что разрезан шарнир, соединяющий звенья 1 и 2, понижение ранга матрицы  $G^l$  наступает при следующих соотношениях между углами:  $\varphi_3=0, \pi, \varphi_4=\varphi_1+\varphi_3$ . В этом случае решение системы уравнений связей также становится невозможным. Для решения этой проблемы следует изменить начальные значения, выведя систему из вырожденного положения.
- При заданных значениях  $q_0, p_0$  происходит вырождение уравнений связей и ранг матрицы  $H_{p,i}$  в системе уравнений (2.3) становится меньше максимального, то есть невозможно выразить вспомогательные переменные посредством формулы (2.4). Следует изменить начальные условия.

## 2.6. Силовые элементы

Силы, с которыми тела объекта действуют друг на друга, общепринятым образом делятся на активные и силы реакций связей. В свою очередь, силы реакций представляются двумя компонентами: касательной составляющей, совершающей работу при движении системы (как правило, это силы трения) и идеальной или нормальной составляющей. Если все связи в системе идеальные, то первая составляющая силы реакции отсутствует. С точки зрения ввода информации о моделируемом объекте, активные силы и неидеальные составляющие сил реакций имеют общие черты: они должны быть описаны, то есть должен быть описан способ их выражения через переменные и параметры системы. Наоборот, структура идеальных составляющих сил реакций полностью определяется типом связи, их вычисление автоматизировано.

В «Универсальном механизме» предусмотрены следующие типы активных сил, различающиеся по способам описания в программе ввода данных:

- силы тяжести;
- шарнирные силы (для поступательного, вращательного и обобщенного шарниров);
- биполярные силы;
- обобщенные линейные силовые элементы;
- контактные силы типа точка – плоскость;
- зубчатые зацепления;
- силы общего вида взаимодействия пары тел;
- силы, программируемые пользователем.

Активная сила может быть функцией времени, координат и их первых производных по времени. В наиболее простых случаях (например для силы тяжести и обобщенного линейного силового элемента) эти зависимости автоматически формируются программой, однако часто они являются весьма сложными и пользователю приходится создавать для их вычисления отдельные процедуры, подключаемые к программе. В этом случае будем говорить о *внешнем задании сил*.

### 2.6.1. Силы тяжести

Используется модель однородного поля сил тяжести, для описания которого пользователю достаточно указать единичный вектор направления силы тяжести. Ускорение свободного падения по умолчанию принимается равным  $9,81 \text{ м/с}^2$ . Есть возможность изменения и отключения сил тяжести. Обобщенные силы, соответствующие силам тяжести, автоматически формируются программой.

### 2.6.2. Шарнирные силы

Одним из часто встречающихся на практике случаев задания активных сил является введение силы (момента), соответствующей поступательной или вращательной степени свободы. Таким образом моделируется двигатель, гидроцилиндр (привод), у которых отсутствует собственная динамика. Например, в модели манипулятора робота часто пренебрегают инерционными свойствами элементов привода и влиянием его собственной динамики, то есть привод идеализируется и считается, что его воздействие на объект сводится лишь к появлению активной силы или момента в кинематической паре. Такая сила (момент) направлена вдоль оси пары.

Для моделирования таких сил в комплексе вводится понятие *шарнирной силы* (момента). Силы данного типа могут быть введены для поступательного, вращательного и обобщенного шарниров. В случае обобщенного шарнира сила (пара сил) может быть введена для любого элементарного преобразования (ЭП) с переменным параметром (то есть  $tv$  или  $rv$ ). Вектор силы (момента пары) направлен вдоль оси поступательного или вращательного шарнира, по оси ЭП обобщенного шарнира. Положительное значение силы (момента) соответствует движению, при котором соответствующая координата возрастает. Считается, что сила является функцией лишь времени, координаты и ее производной по времени (скорости). Это ограничение снимается, если используется внешний способ описания силы, то есть расчет силы при моделировании движения происходит с использованием процедуры, написанной пользователем и подключенной к программе.

Для шарнира с несколькими степенями свободы возможно введение силы для каждой степени свободы, либо для некоторых из них.

### 2.6.3. Биполярные силы

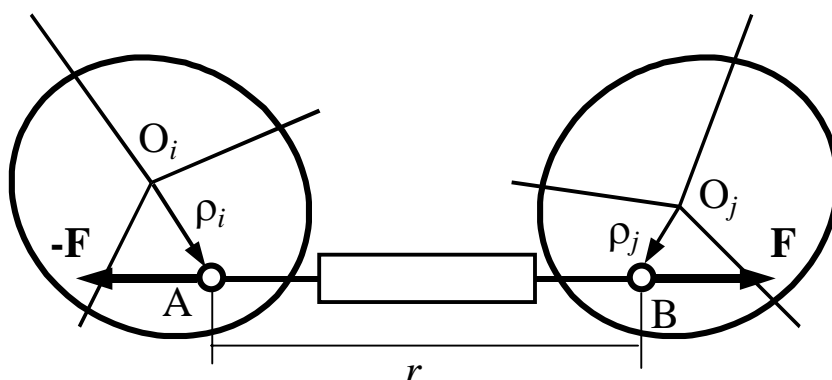


Рис. 2.15

Биполярный силовой элемент соединяет две фиксированные точки пары тел ( $A_i, A_j$  на **Рис. 2.15**). Сила взаимодействия тел направлена вдоль прямой, соединяющей точки, и может зависеть от времени  $t$ , расстояния между точками  $r$  и производной от него по времени  $v$ ,

$$F = F(t, r, \dot{r}).$$

Сила  $F$  положительна в случае отталкивания, то есть в примере на **Рис. 2.15**  $F > 0$ .

В программе ввода предусмотрен ряд стандартных зависимостей биполярной силы от переменных: линейная, в виде произвольного аналитического выражения, в табличной форме и так далее.

**В общем случае**  $r \geq 0$ . При нулевом значении расстояния между точками прикрепления элемента происходит его вырождение (не определено направление силы). В этом случае силе присваивается нулевое значение.

**Пример.** Рассмотрим биполярную силу, моделирующую линейный вязко-упругий элемент с коэффициентами жесткости  $c$  и диссипации  $d$ . Предположим, что исследуется движение объекта в окрестности положения равновесия. Пусть в положении равновесия сила равна  $F_0$ , а расстояние между точками прикрепления элемента обозначено  $x_0$ . Тогда аналитическое выражение для силы можно задать следующим образом:

$$F = F_0 - c(x - x_0) - dv.$$

Сила  $F_0$  положительная, если в положении равновесия силовой элемент сжат и отрицательная, если растянут.

Модели сил рассмотрены в п. Типы скалярных сил.

### 2.6.1. Скалярный момент

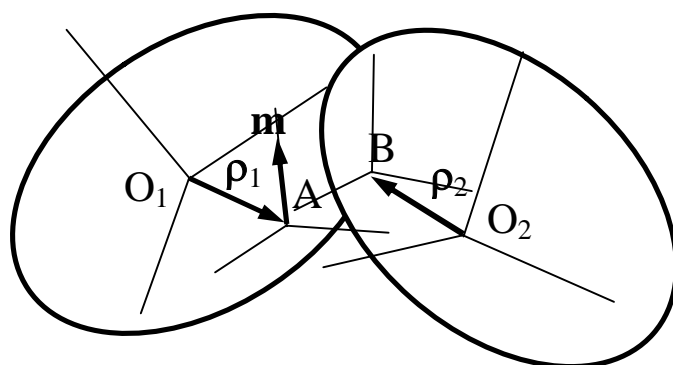


Рис. 2.16. К понятию скалярного момента

Данный тип силового элемента описывает момент, действующий со стороны первого тела на второе. Для пояснения модели момента рассмотрим взаимодействующие тела 1 и 2, **Рис. 2.16**. Точки \$O\_1\$ и \$O\_2\$ являются началами отсчета локальных систем координат, жестко связанных с телами, СК1 и СК2. Введем дополнительные системы координат СКА1 и СКВ2, связанные с телами 1 и 2 соответственно с началами в произвольных точках А и В. Скалярный момент  $\mathbf{m}$  зависит от ориентации СКВ2 относительно СКА1 и не зависит от положений начала отсчета этих систем координат. Кроме того, предполагается, что оси аппликат (Z) этих систем координат **почти параллельны друг другу**, то есть в процессе движения угол между этими осями мал и не превосходит десяти градусов. При этих предположениях совместим начала отсчета СКА1 и СКВ2, выполнив параллельный перенос осей СКА1.

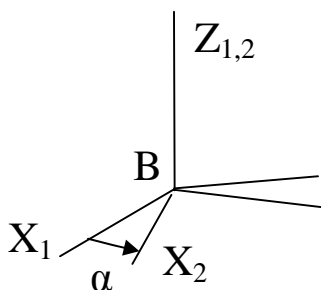


Рис. 2.17. Угол поворота второго тела относительно первого

Введем угол поворота второго тела относительно первого  $\alpha$ , как угол между осями X СКВ2 и СКА1, **Рис. 2.17**. Для упрощения оси аппликат на этом рисунке совмещены. Скалярный момент  $\mathbf{m}$ , действующий на второе тело со стороны первого, направлен по оси Z СКА1. Величина момента зависит от угла  $\alpha$ , производной по времени от этого угла  $\dot{\alpha}$  и времени  $t$

$$m = m(\alpha, \dot{\alpha}, t)$$

Математические модели этих зависимостей рассмотрены в п. Типы скалярных сил.

**Замечание.** Если второе тело связано с первым вращательным шарниром, ось которого совпадает с осью Z СКА1, а оси Z СКА1 и СКВ2 совпадают, так что угол  $\alpha$  равен шарнирной координате, то скалярный момент может быть эквивалентным образом описан как шарнирный момент, см. п. Шарнирные силы.

## 2.6.2. Типы скалярных сил

В случае скалярной силы (шарнирной силы, скалярного момента, биполярного силового элемента и осевой силы для элемента - комбинированное трение) ее описание предполагает задание математической модели в виде некоторой скалярной функции  $f = f(x, v, t)$ . Для шарнирной силы  $x, v$  – значение координаты и ее производной по времени, для скалярного момента – угол поворота тела и соответствующая угловая скорость, для биполярного силового элемента – это длина элемента и его производная по времени, для комбинированного трения – смещение вдоль оси элемента. В любом случае  $t$  – это текущее значение времени. Рассмотрим способы задания функции (типы сил).

### 2.6.2.1. Линейная модель силы

Модель силы соответствует линейному упруго-вязкому взаимодействию с гармоническим возбуждением:

$$f = F_0 - c(x - x_0) - dv + Q \sin(\omega t + \alpha).$$

Здесь  $F_0$  - постоянная составляющая силы,  $c, d$  - коэффициенты жесткости и диссипации,  $x_0$  – значение координаты  $x$ , при которой упругая составляющая обращается в ноль,  $Q, \omega, \alpha$  амплитуда, частота и начальная фаза гармонического возбуждения.

Элемент используется для описания упругих линейных пружин и диссипативных элементов (гасителей колебаний), гармонического возбуждения и их комбинаций.

Добавление элемента данного типа в модель см. Гл.3, п. *Ввод биполярных силовых элементов | Линейный силовой элемент.*

### 2.6.2.2. Фрикционная модель силы

Используется в основном для моделирования фрикционных гасителей колебаний. Модель силы включает два режима: режим скольжения и режим сцепления. В режиме скольжения сила определяется моделью

$$f = -F \text{sign}(v)$$

аналогично кулоновскому трению с постоянным значением силы трения скольжения  $F$  и скоростью скольжения  $v$ . В режиме сцепления сила определяется по формуле

$$f = f_0 - c(x - x_0) - d \cdot v,$$

то есть имеет линейную упруго-диссипативную модель с коэффициентами жесткости  $c$  и диссипации  $d$ . Значение остальных параметров в данной формуле будет ясно из дальнейшего.

Переход из режима скольжения в режим сцепления происходит в тот момент, когда скорость  $v$  меняет знак. В этот же момент времени запоминаются значения силы  $f$  и переменной  $x$  (значения  $f_0$  и  $x_0$  в формуле для силы в режиме сцепления).

Переход от режима сцепления в режим скольжения происходит в момент, когда сила достигает предельного значения

$$|f| \geq \delta F,$$

где  $\delta = \mu_0 / \mu \geq 1$  - отношение постоянных коэффициентов трения покоя и скольжения.

При описании силы данного типа пользователь должен задать значения параметров  $F, c, d, \delta$

Добавление элемента данного типа в модель см. Гл.3, п. *Ввод биполярных силовых элементов | Фрикционный и упруго-фрикционный элементы.*

### 2.6.2.3. Упруго – фрикционная модель силы

Одна из распространенных моделей трения, представляющая собой последовательное соединение пружины (моделирует упругие свойства контактирующих поверхностей) и кулоновского трения. Для гашения упругих колебаний дополнительно используется линейный диссипативный элемент, расположенный параллельно с пружиной (Рис. 2.18).

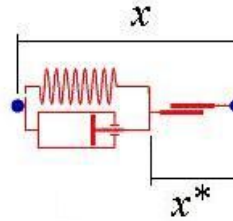


Рис. 2.18

Математическая модель данного элемента зависит не только от переменных  $x, v$ , но также от вспомогательной переменной  $x^*$ . В режиме скольжения фрикционного элемента математическая модель силы описывается дифференциальным уравнением относительно переменной  $x^*$

$$-d(v - \dot{x}^*) - c(x - x^*) = \text{sgn } \dot{x}^* \cdot F \tag{2.7}$$

$$f = \text{sgn } \dot{x}^* \cdot F .$$

Здесь  $c, d$  – коэффициент жесткости и диссипации,  $F$  – постоянная сила трения. Таким образом, уравнение представляет собой равенство силы трения и силы, образованной параллельным соединением пружины с демпфером.

В режиме сцепления переменная  $x^*$  постоянна, а сила, производимая элементом, определяется формулой

$$f = -dv + c(x^* - x)$$

Переход из режима сцепления в режим скольжения происходит при условии

$$|f| \geq \delta F ,$$

где  $\delta = \mu_0 / \mu \geq 1$  – отношение постоянных коэффициентов трения покоя и скольжения.

Переход от режима скольжения в режим сцепления происходит при выполнении условия

$$\dot{x}^* \dot{x}^{*-} < 0 ,$$

где  $\dot{x}^{*-}$  – значение скорости  $\dot{x}^*$  на предыдущем шаге интегрирования. Это условие соответствует изменению направления проскальзывания во фрикционном элементе.

Перейдем от переменной  $x^*$  к переменной

$$y = x - x^* ,$$

которая соответствует величине упругой деформации элемента. Тогда в режиме скольжения данная переменная удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y} + \frac{c}{d} y = -\frac{1}{d} \text{sgn}(v - \dot{y}) \cdot F , \tag{2.8}$$

а сила, производимая элементом равна  $f = \text{sgn}(v - \dot{y}) \cdot F$ . В режиме сцепления имеем

$$\dot{y} = v ,$$

$$f = -dv - cy ,$$

а переход от режима скольжения к режиму сцепления происходит при выполнении условия

$$(v - \dot{y})(v^- - \dot{y}^-) < 0.$$

Заметим, что в такой формулировке модель силового элемента полностью совпадает с трением в модели податливого контакта [1].

Рассмотрим свойства переменной  $y$ . Поскольку на этапе сцепления она изменяется так же, как и переменная  $x$ , то основной интерес представляет ее поведение на этапе скольжения, определяемые дифференциальным уравнением (2.8). Преобразуем это уравнение к виду

$$\dot{y} + \lambda y = \pm \Delta,$$

где  $\lambda = k/(2\beta)$ ,  $k = \sqrt{c/m}$  – круговая частота колебаний груза массы  $m$  на пружине жесткости  $c$ ,  $\beta$  – доля демпфирования от критического (см. п. 2.7),  $\Delta = F/c$  – деформация пружины силой, равной силе трения. Обычно частота  $k$  велика, поэтому при реальных значениях демпфирования ( $\beta < 1$ ) величина  $\lambda$  является большой в смысле жесткости данного дифференциального уравнения. Например, при  $k = 628$  рад/с (примерно 100 Гц) и  $\beta = 0,1$  получим  $\lambda = 3140$

Если величина  $\Delta$  постоянная, то решение уравнения с начальным условием  $y(0) = y_0$  имеет вид

$$y = y_F + y_0(1 - e^{-\lambda t}), \quad y_F = \pm \frac{\Delta}{\lambda}.$$

Если величина  $\Delta$  переменная в силу переменности величины силы трения, то методами асимптотических разложений сингулярно возмущенных уравнений можно показать, что решение в первом приближении имеет аналогичный вид в том смысле, что решение можно представить в виде суммы медленно меняющейся функции  $y_F$  и быстро стремящегося к нулю слагаемого (пограничная функция). Типичный пример поведения переменной  $y$  приведен на **Рис. 2.19** (см. также раздел *Примеры* руководства пользователя, п. “Затухающие свободные колебания”). На левом рисунке показана зависимость  $y(t)$  при  $y_0 = 1$ . Практически это график соответствует быстрому стремлению к нулю второго слагаемого в решении. На графике справа изображена зависимость  $y(t)$ ,  $y_0 = 0$  для процесса, при котором скольжение несколько раз меняет направление. Практически постоянные куски соответствуют режимам скольжения, участки со значительным изменением переменной – режимам сцепления. В приведенном примере  $\delta = 1,2$  (отношение коэффициента трения покоя к коэффициенту трения скольжения).

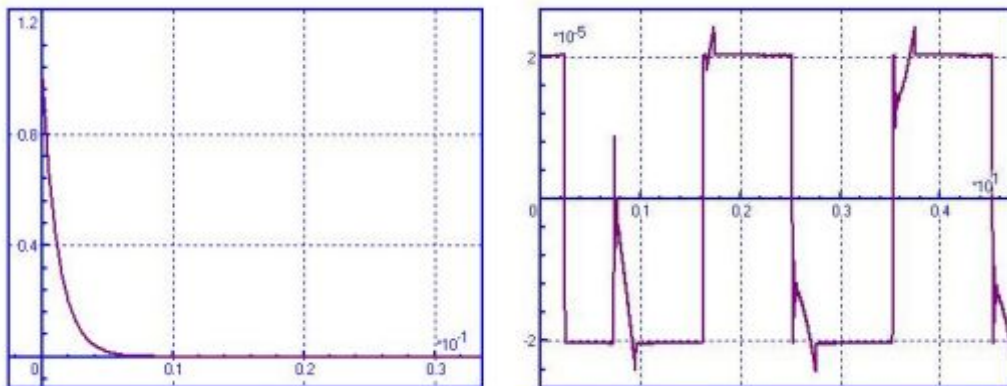


Рис. 2.19. Переменная  $y$  (деформация упругого элемента) в зависимости от времени при различных начальных условиях

**Замечание 1.** Свойства моделей силы “фрикционная” и “упруго-фрикционная” изучаются и сравниваются в разделе руководства пользователя *Примеры*, п. “Простой фрикционный элемент”. Сравнение показывает, что обе модели дают близкие результаты, однако “упруго-фрикционная” сила вводит дополнительную координату и имеет худшие показатели по устойчивости численных методов в силу жесткости дифференциального уравнения (2.8). Поэтому рекомендуется использовать первую модель трения, “фрикционную”.

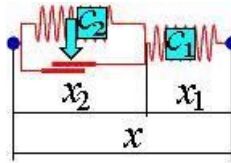
**Замечание 2.** Хотя модель силы включает дифференциальное уравнение первого порядка, внутреннее его представление заменяется уравнением второго порядка

$$\ddot{z} + \frac{c}{d} \dot{z} = -\frac{1}{d} \operatorname{sgn}(v - \dot{z}) \cdot F, \quad y = \dot{z}$$

с целью унификации численных методов (уравнения движения – это система дифференциальных уравнений второго порядка, и этот факт учитывается численными методами их решения).

Добавление элемента данного типа в модель см. Гл.3, п. *Ввод биполярных силовых элементов / Фрикционный и упруго-фрикционный элементы.*

### 2.6.2.4. Упруго – фрикционная сила 2



Сила представляет собой последовательное соединение пружины ( $c_1$ ) с параллельным соединением пружины ( $c_2$ ) и фрикционного элемента. В отличие от предыдущих моделей фрикционных элементов, сила трения в данном случае не является постоянной, а зависит от деформации параллельной пружины  $c_2$ .

Рассмотрим математическую модель элемента, введя длины пружин  $x_1, x_2$ . Примем начальные условия  $x_2(0) = 0, x_1(0) = x(0)$ , то есть в начальный момент времени пружина  $c_2$  имеет нулевую длину, и это соответствует ее недеформированному состоянию. Обозначим  $L_0$  длину пружины  $c_1$  в недеформированном состоянии. Тогда усилия в пружинах задаются выражениями

$$f_1 = -c_1 \Delta x_1 = -c_1(x_1 - L_0) = -c_1(x - L_0 - x_2) = -c_1(\Delta x - x_2),$$

$$f_2 = -c_2 \Delta x_2 = -c_2 x_2.$$

Здесь  $\Delta x = x - L_0$ .

Как и выше, трение имеет два режима: скольжение и сцепление. В режиме скольжения примем модель силы трения, пропорциональной силе в пружине  $c_2$

$$F_{fr} = -\mu \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) |f_2| = -\mu \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) |c_2 x_2| = -\mu \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) \operatorname{sgn}(x_2) c_2 x_2.$$

где  $\mu$  - коэффициент трения скольжения. Значение деформации  $x_2$  можно определить из условия равенства силы в пружине  $c_1$  и в параллельном соединении пружины  $c_2$  и трения

$$f = f_1 = f_2 + F_{fr},$$

то есть

$$-c_1(\Delta x - x_2) = -c_2 x_2 - \mu \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) \operatorname{sgn}(x_2) c_2 x_2,$$

откуда получим окончательное выражение для деформации пружин.

$$x_2 = \frac{c_1 \Delta x}{c_1 + c_2 (1 + \mu \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) \operatorname{sgn}(x_2))} = \frac{c_1 \Delta x}{c_1 + c_2 (1 \pm \mu)},$$

$$\Delta x_1 = x - x_2.$$

Из полученного выражения следует, что в режиме скольжения знаки переменных  $\Delta x$  и  $x_2$  совпадают (по крайней мере, при  $\mu < 1$ ). Сила принимает значение

$$f = \frac{c_1 c_2 \Delta x (1 \pm \mu)}{c_1 + c_2 (1 \pm \mu)}.$$

Во многих практически важных случаях справедлива оценка  $c_1 \gg c_2$ , то есть

$$f \approx c_2 \Delta x (1 \pm \mu).$$

В этих случаях коэффициент трения приближенно равен так называемому «коэффициенту относительного трения», рассчитываемому по формуле

$$\varphi = \frac{f_c - f_s}{f_c + f_s} \approx \mu,$$

где  $f_c \approx c_2 \Delta x (1 + \mu)$ ,  $f_s \approx c_2 \Delta x (1 - \mu)$  - силы при сжатии и растяжении.

В режиме сцепления величина  $x_2$  постоянна и силовой элемент производит силу, определяемую по формуле

$$f = f_1 = c_2 (\Delta x - x_2),$$

Наконец, переход от режима скольжения в режим сцепления происходит при изменении знака скорости  $\dot{x}_2$ , оцениваемого по разности  $x_2 - x_2^-$ , где  $x_2^-$  - значение координаты на предыдущем шаге интегрирования. Переход из режима сцепления в режим скольжения происходит в соответствии с законом Кулона при выполнении условия

$$|F_{fr}| = |f_1 - c_2 x_2| > \mu_0 |c_2 x_2|,$$

где  $\mu_0$  - коэффициент трения покоя.

Таким образом, модель силы описывается следующим набором параметров:

$c_1, c_2$  - жесткости пружин,

$\mu, \mu_0$  - коэффициенты трения покоя и скольжения,

$L_0$  - длина элемента в недеформированном состоянии.

Типичная гистерезисная зависимость силы от координаты представлена на **Рис. 2.20**, а зависимость координаты от времени в случае свободных колебаний – на **Рис. 2.21**. Амплитуда колебаний убывает экспоненциально, как и в случае вязкого трения, однако данный силовой элемент реализует частотно независимое демпфирование (как, например, резина).

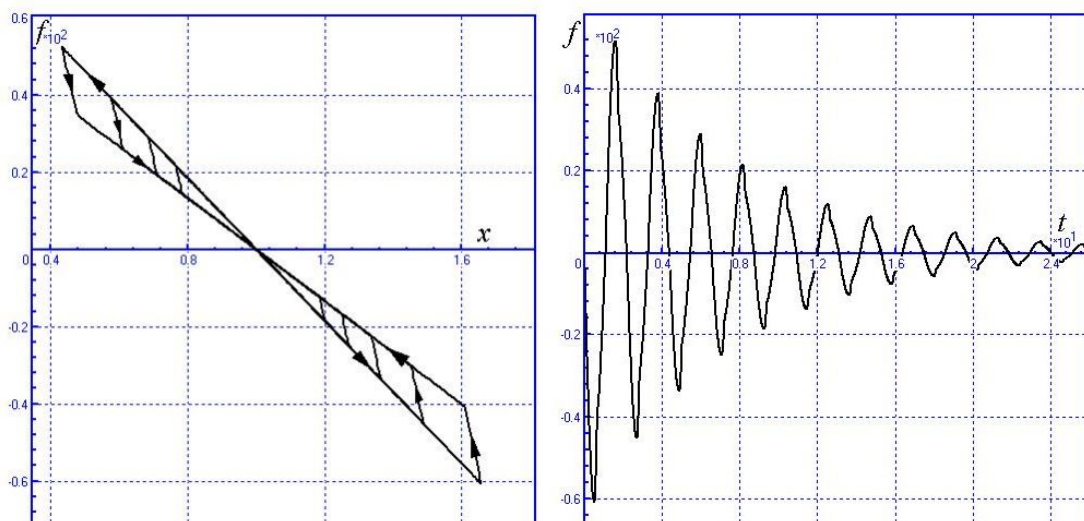
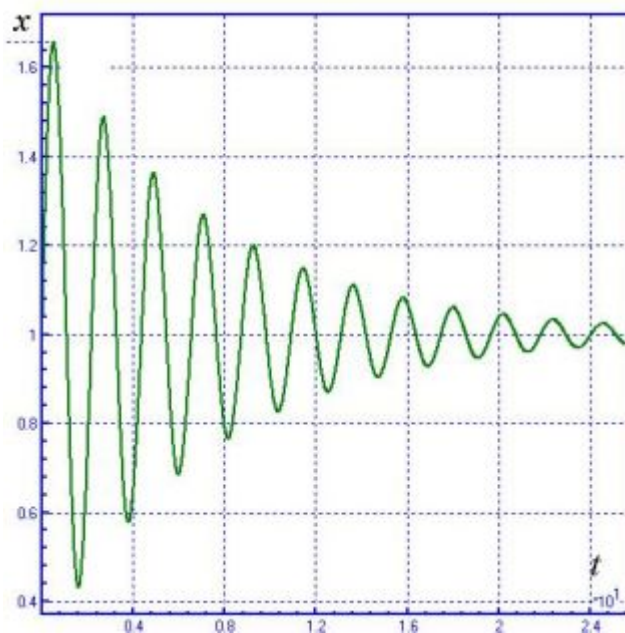


Рис. 2.20. Зависимости силы от координаты  $x$  и времени

Рис. 2.21. Зависимости координаты  $x$  от времени

**Замечание 1.** Свойства данной модели силы изучаются в разделе руководства пользователя *Примеры*, п. “Упруго-фрикционный элемент 2”.

**Замечание 2.** Силовой элемент данного типа может быть использован для моделирования листовых рессор, внутреннего трения в резинометаллических элементах (поскольку создаваемое элементом демпфирование является частотно независимым) и так далее.

**Замечание 3.** При нулевом или отрицательном значении хотя бы одной из жесткостей  $c_1$  или  $c_2$  силовой элемент игнорируется.

**Замечание 4.** При нулевом трении модель соответствует последовательному соединению пружин без диссипации.

**Замечание 5.** Для биполярного силового элемента не следует допускать переход через нулевое значение длины. В этом случае результаты моделирования становятся некорректными. Не допускается также значение коэффициента трения большего 1.

**Замечание 6.** Для данного элемента коэффициентам трения скольжения и покоя обычно дается одинаковое значение.

**Замечание 7.** В режиме сцепления элемент не имеет диссипации. При необходимости следует ставить параллельно ему диссипативный элемент.

Добавление элемента данного типа в модель см. Гл.3, п. *Ввод биполярных силовых элементов / Упруго-фрикционный элемент 2.*

**2.6.2.5. Упруго-диссипативный элемент**

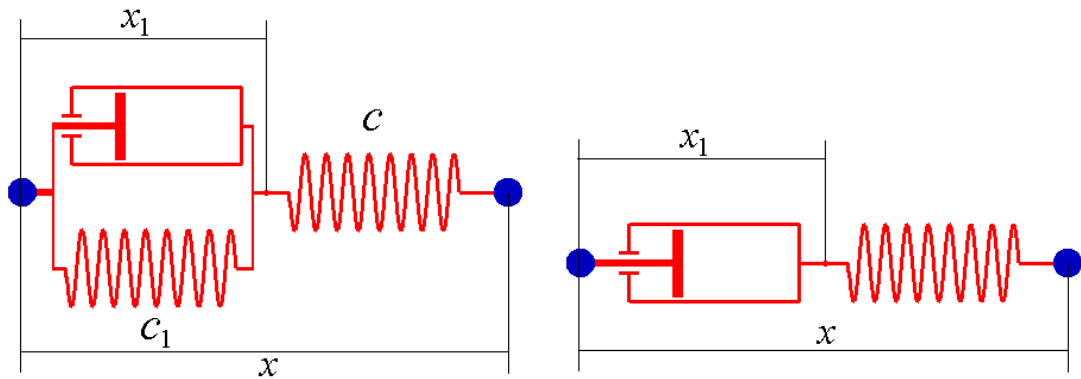


Рис. 2.22. Схема силового элемента

Элемент представляет собой последовательное соединение линейной пружины и блока параллельно соединенных пружины и линейного демпфера (Рис. 2.22, слева). В такой схеме элемент используется в модели пневморессоры (модели Нишимуры). В частном случае  $c_1 = 0$  (Рис. 2.22, справа) получим другой распространенный элемент – последовательное соединение линейных пружины и демпфера, который используется в основном для моделирования гасителей колебаний, а в параллельном соединении с элементами других типов – для моделирования резинометаллических элементов, эластомеров и так далее.

Математическая модель строится из условия равенства упругой и упруго-диссипативной сил в силу безынерционности силового элемента и включает дифференциальное уравнение

$$v\dot{x}_1 + c_1x_1 = c(x - x_0 - x_1) = c(\Delta x - x_1),$$

где  $x_0$  - длина элемента в ненагруженном состоянии (игнорируется при  $c_1 = 0$ ).

Таким образом, элемент вносит в модель объекта дополнительную координату  $x_1$  и соответствующее ей дополнительное дифференциальное уравнение. При малом значении постоянной времени

$$T = \frac{v}{c}$$

дифференциальное уравнение является жестким, и следует использовать метод Парка интегрирования уравнений движения и использовать матрицы Якоби. Следует также отметить, что при малой постоянной времени  $T$ , силовой элемент для моделей с низкочастотными процессами динамики эквивалентен более простому линейному диссипативному элементу.

**Замечание 1.** Хотя модель силы включает дифференциальное уравнение первого порядка, внутреннее его представление заменяется уравнением второго порядка

$$\ddot{z} + \frac{c + c_1}{v} \dot{z} = \frac{c}{v} \Delta x,$$

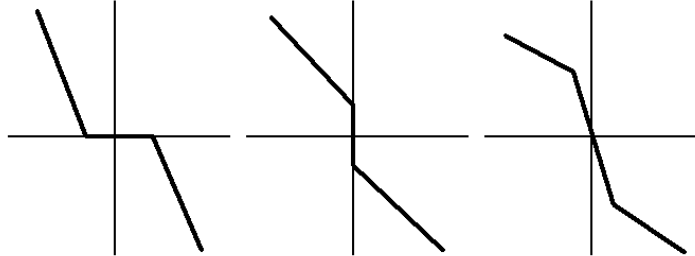
с целью унификации численных методов (уравнения движения – это система дифференциальных уравнений второго порядка, и этот факт учитывается численными методами их решения).

**Замечание 2.** Обычно для переменной  $x_1$  (точнее,  $z$ ) задаются нулевые начальные условия.

Добавление элемента данного типа в модель см. Гл.3, п. Ввод биполярных силовых элементов / Упруго-вязкий элемент.

### 2.6.2.6. Поточечная модель силы

При поточечном задании можно построить зависимость  $f(x)$ ,  $f(v)$  или  $f(t)$ , указав отдельные точки на графике. Координаты точек могут задаваться как числами, так и выражениями. УМ использует методы линейной интерполяции и экстраполяции для расчета значения функции в произвольных точках. На рисунке приведены некоторые примеры задания нелинейных сил, которые легко реализуются с помощью данного метода.



Во всех приведенных примерах графики задаются четырьмя точками.

**Замечание.** Экстраполяция графика происходит линейно, то есть проводится прямая через две крайние (левые или правые) точки.

Добавление элемента данного типа в модель см. Гл.3, пп. *Ввод биполярных силовых элементов | Поточечное (числа) задание силы, Ввод биполярных силовых элементов | Поточечное (выражения) задание силы*

### 2.6.2.7. Модель силы - выражение

Сила задается выражением с использованием стандартных функций. Например,

$$f = f_0 - c(x - x_0) - dv + a \sin(15t)$$

См. Гл.3., п. *Выражение – явная функция.*

### 2.6.2.8. Рессора Фанчера

Этот тип силы используется для моделирования безынерционных листовых рессор. Математическая модель строится следующим образом:

$$F_i = F_{env,i} + (F_{i-1} - F_{env,i-1})e^{-|\Delta x_i - \Delta x_{i-1}|/\beta},$$

$$F_{env,i} = -c\Delta x_i - F_{fr} \text{sign}\{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}\},$$

$$F_{fr} = fc\Delta x_i,$$

$$\Delta x = x - x_0.$$

Здесь  $i$  – номер шага интегрирования,  $f$  – коэффициент трения,  $c$  – жесткость рессоры,  $F_{fr}$  – сила трения,  $\beta$  – экспоненциальный параметр подвешивания (запаздывания),  $x_0$  – высота рессоры в недеформированном состоянии. Для сжатого ( $dx > 0$ ) и растянутого ( $dx < 0$ ) состояния рессоры параметрам  $c$  и  $f$  могут быть назначены разные значения.

На рисунке ниже приведен пример свободных вертикальных колебаний тела, прикрепленного к базе с помощью рессоры Фанчера,  $\beta = 0.002$  м.

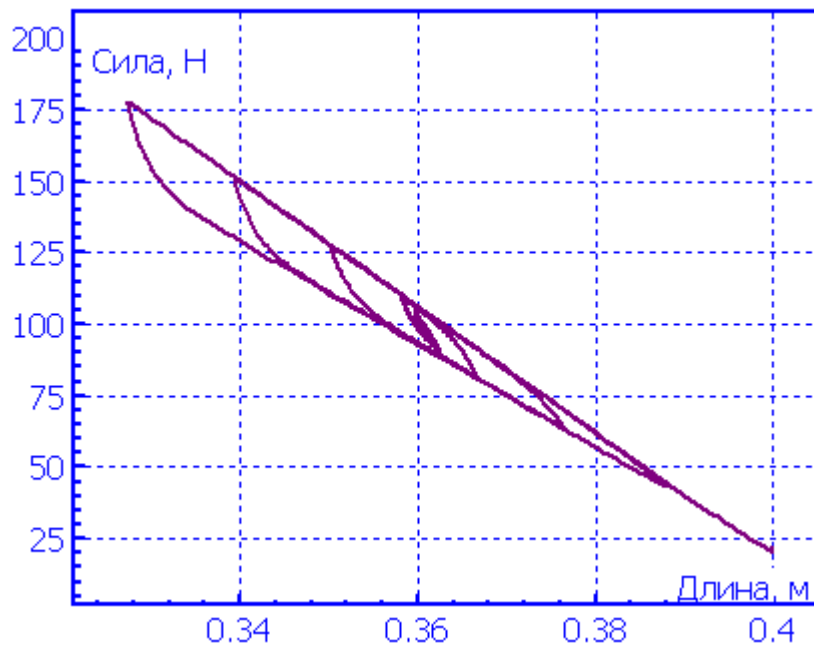


Рис. 2.23. Типичный график поведения для рессоры Фанчера

**Замечание.** При больших значениях коэффициента  $\beta$  математическая модель неустойчива, рекомендуется выбирать этот параметр в пределах 0,001 ÷ 0,004. В случае при  $\beta \rightarrow 0$  модель по своему поведению близка к упруго-фрикционному элементу 2, см. п. 2.6.2.4.

### 2.6.2.9. Модель силы - внешняя функция

Значение функции рассчитывается в процедуре, написанной пользователем в файле управления. См. Гл.3., п. *Внешние функции*.

### 2.6.2.10. Гистерезис

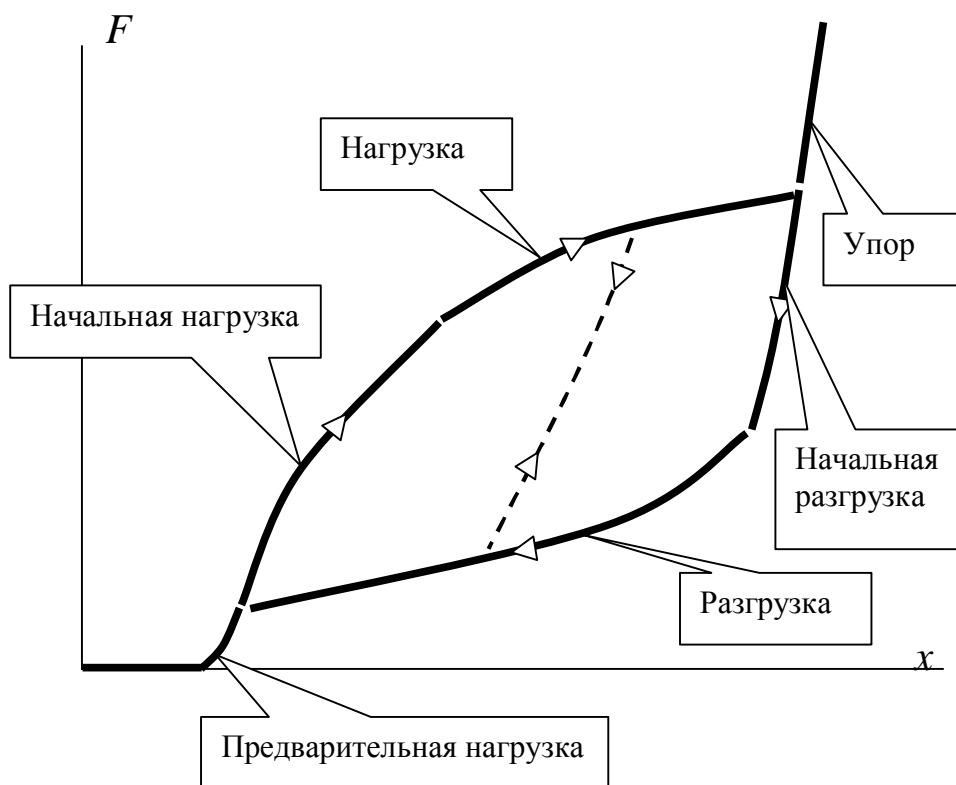


Рис. 2.24. Схема гистерезисной кривой

#### Основные понятия и определения.

Гистерезисный тип задания силы предназначен для моделирования силовых элементов, у которых закон изменения силы имеет гистерезисных характер. Таким образом можно, например, моделировать фрикционные поглощающие аппараты, характеристики которых получены экспериментально.

Схема задания закона изменения силы представлена на Рис. 2.24 (зависимость силы от изменения длины или координаты). Описание закона включает задание четырех кривых:

- *предварительная нагрузка*, имеющая характер упругой нелинейной кривой, включающей возможный зазор;
- кривая нагружения, состоящая из двух частей: *начальная нагрузка* и *нагрузка*;
- кривая разгрузки, состоящая из двух частей: *начальная разгрузка* и *разгрузка*;
- *упор* – нелинейная упругая характеристика.

Кривые начальной нагрузки и начальной разгрузки используются, в частности, для расчета *кривой промежуточной нагрузки и разгрузки*, изображенной на рисунке пунктирной линией. Переход на промежуточную кривую происходит в двух случаях. Во-первых, когда элемент находится на кривой нагрузки, и координата начинает уменьшаться. Во-вторых, когда элемент находится на кривой разгрузки, и координата начинает увеличиваться. После попадания на промежуточную характеристику элемент находится на ней как на упругом нелинейном элементе до тех пор, пока не перейдет на кривую нагрузки или кривую разгрузки (движение по промежуточной кривой соответствует режиму сцепления фрикционного элемента).

#### Особенности описания кривых.

1. Задается набор характерных точек, через которые проходят кривые.

2. Каждая кривая задается номерами точек, абсциссы которых расположены в порядке возрастания. Кривые должны являться однозначными функциями, то есть каждому значению абсциссы в области определения функции должно соответствовать единственное значение ординаты.

3. Точки, соединяющие кривые, должны быть одинаковыми. Например, первые точки кривых начальной нагрузки и разгрузки, первая точка нагрузки и последняя точка начальной нагрузки и т.д. должны совпадать.

4. Кривая может быть задана ломаной (отрезками прямых) или с помощью интерполяционных полиномов, порядок  $n$  которых задается пользователем. Заметим, что число точек на каждой кривой должно на единицу превосходить порядок полинома  $n$ .

**Формулы расчета кривой промежуточной нагрузки и разгрузки.**

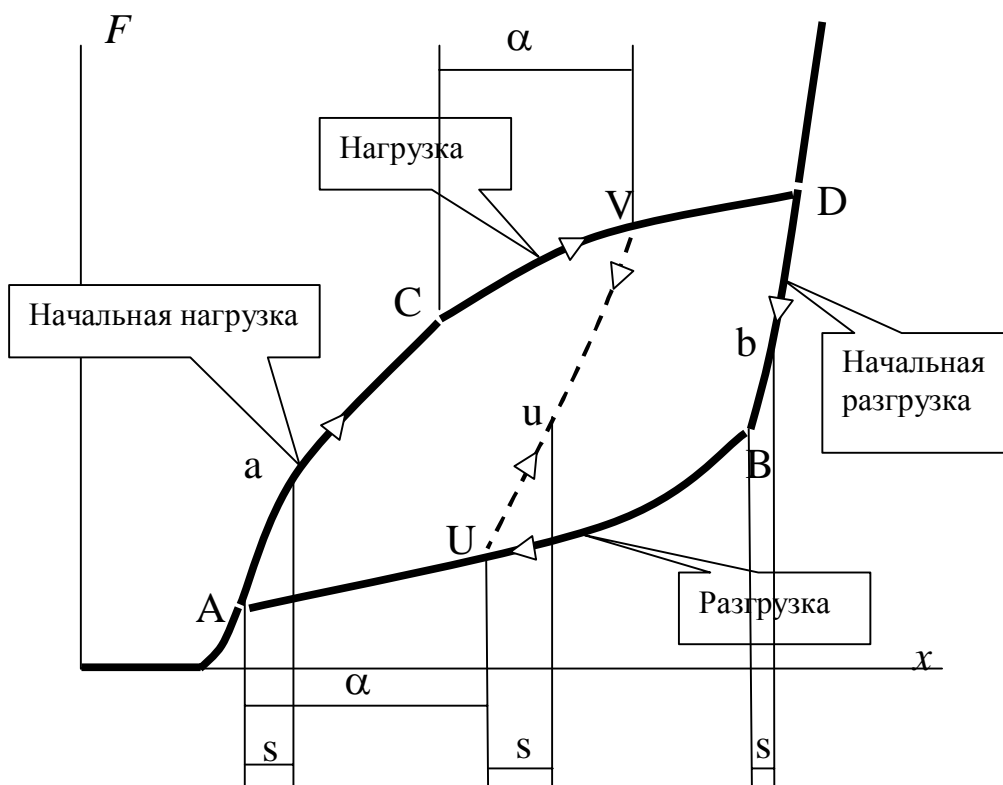


Рис. 2.25. Определение кривой промежуточной нагрузки и разгрузки

Предположим, что переход на кривую промежуточной разгрузки произошел с кривой нагрузки в точке V (Рис. 2.25). Определим безразмерный параметр  $\alpha \in [0,1]$  по формуле

$$\alpha = \frac{x_V - x_C}{x_D - x_C}$$

и определим точку U на кривой разгрузки, определяемую тем же значением параметра  $\alpha$  при значении абсциссы

$$x_U = x_A \alpha + x_B (1 - \alpha)$$

Искомая кривая проходит через точки U, V. Для определения координат ее произвольной точки  $u$ , определяемой безразмерным параметром  $s \in [0,1]$

$$s = \frac{x_V - x_u}{x_V - x_U}$$

определим точки  $a, b$  на кривых начальной нагрузки и начальной разгрузки с абсциссами

$$x_a = x_A s + x_C(1 - s), \quad x_b = x_B s + x_D(1 - s).$$

Тогда абсцисса и ордината искомой точки  $u$  вычисляются по формулам

$$x_u = (x_U - x_B \alpha - x_A(1 - \alpha))(1 - s) + (x_V - x_D \alpha - x_C(1 - \alpha))s + x_b \alpha + x_a(1 - \alpha),$$

$$F_u = (F_U - F_B \alpha - F_A(1 - \alpha))(1 - s) + (F_V - F_D \alpha - F_C(1 - \alpha))s + F_b \alpha + F_a(1 - \alpha)$$

Построенная таким образом кривая обладает следующими свойствами:

- при  $\alpha = 0$  совпадает с кривой начальной нагрузки;
- при  $\alpha = 1$  совпадает с кривой начальной разгрузки;
- при промежуточных значениях параметра  $\alpha$  кривая проходит через точки  $U, V$ .

Таким образом, кривая промежуточной нагрузки и разгрузки является комбинацией кривых начальной нагрузки и разгрузки.

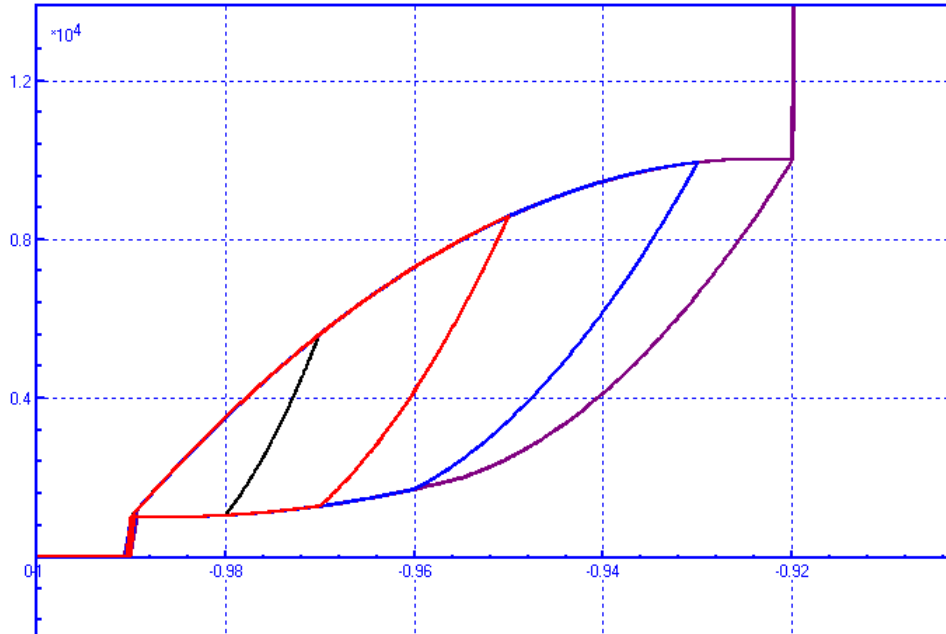


Рис. 2.26. Пример гистерезисной модели с мягкой характеристикой

Пример модели гистерезисной силы приведен на Рис. 2.26. Кривая предварительной нагрузки задана ломаной, проходящей через три точки и задает зазор 10мм. Кривые нагрузки, разгрузки и начальной разгрузки заданы тремя точками каждая, и используется интерполяционный полином второго порядка. Кривая начальной нагрузки задана двумя очень близкими точками и на графике не видна. На рисунке приведены также три промежуточные кривые и кривая упора (отрезок прямой).

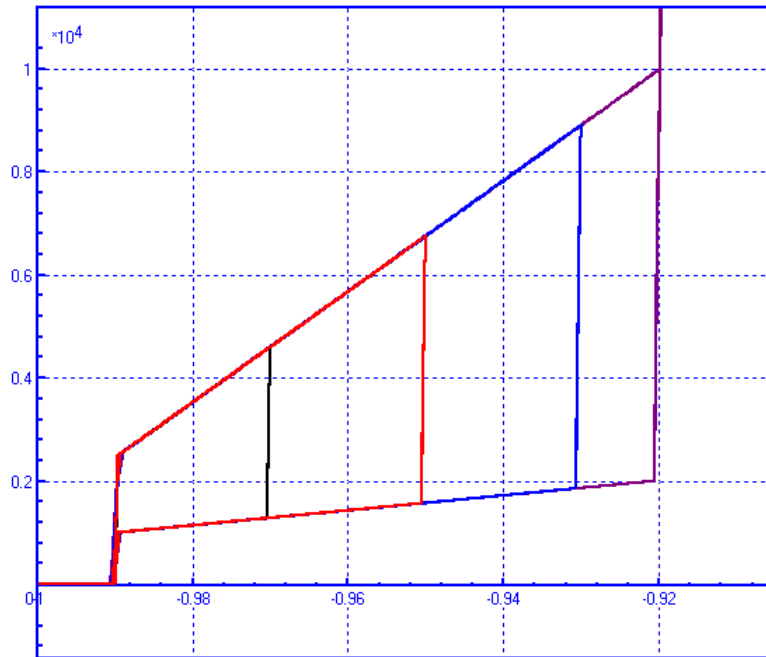


Рис. 2.27. Пример гистерезисной модели с идеализированной фрикционной характеристикой

На Рис. 2.27 приведен пример упруго-фрикционной характеристики с зависимым трением. Все кривые заданы ломаными.

Ввод данных: Гл. 3, п. Ввод данных/Ввод силовых элементов/Ввод биполярных силовых элементов/Гистерезис.

**Замечания.**

1. Приведенные элементы могут работать как на сжатие или растяжение, так и симметрично в обе стороны.
2. Рекомендуется устанавливать линейный диссипативный элемент параллельно гистерезисному, поскольку на промежуточных кривых не происходит рассеивания энергии.

**2.6.2.11. Удар**

Силы данного типа используются для моделирования упоров на сжатие или растяжение. Используется следующая модель силы:

$$\Delta = x - l$$

$$F = -c\Delta^b - step(\Delta, 0, \Delta_d, 0, d)v$$

$x$  – текущая длина силового элемента для биполярных силовых элементов или текущее значение шарнирной координаты для шарнирных сил;

$l$  – длина элемента при выбранном зазоре для биполярных силовых элементов; значение шарнирной координаты, при котором начинает работать упор, для шарнирных сил;

$c$  – коэффициент жесткость в контакте,

$b$  – показатель степени характеристики силы, в настоящей версии программы полагается равным 1;

$\Delta_d$  - внедрение, при котором эффективный коэффициент диссипации достигает своего максимального значения;

$d$  – коэффициент диссипации в контакте,

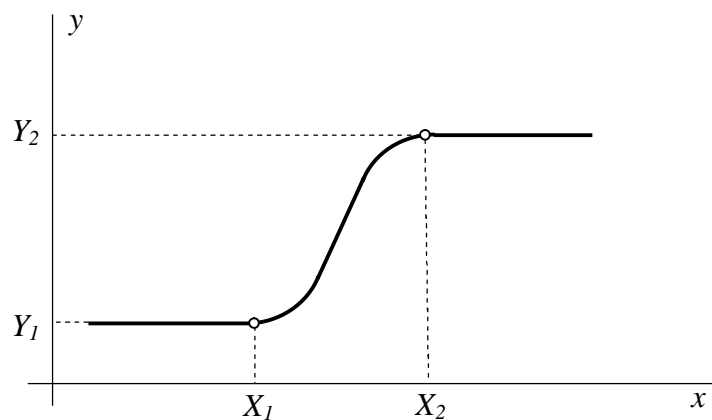
$step$  – определение функции  $step$  см. ниже.

За счет использования функции *step* коэффициент демпфирования в контакте плавно меняется от нуля при нулевом внедрении до своего максимального значения  $d$  при внедрении большем или равном  $\Delta_d$ . Это позволяет получить гладкую зависимость диссипативной составляющей контактной силы.

### Функция *step*

Функция *step* позволяет сгладить переход между двумя уровнями значений функции ( $Y_1, Y_2$ ) на некотором интервале сглаживания ( $X_1, X_2$ ).

$$step(x, x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{cases} y_1, & x \leq x_1 \\ y_1 + (y_2 - y_1) \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 \left( 3 - \frac{2(x - x_1)}{x_2 - x_1} \right) & x_1 < x < x_2 \\ y_2, & x \geq x_2 \end{cases}$$



#### 2.6.2.12. Библиотека (DLL)

Сила данного типа рассчитывается во внешней динамически-загружаемой библиотеке (DLL). Доступные модели сил находятся в каталоге `<um_root>\bin\lib\bfrc` (bfrc – от английского bipolar forces – биполярные силы). Некоторые модели сил могут поставляться вместе с программным комплексом «Универсальный механизм». Динамические библиотеки, разработанные пользователем или сторонними авторами, также должны быть размещены по указанному выше пути.

Способ расчета скалярной силы во внешней библиотеке является частным случаем использования внешних библиотек, который описан в «Гл. 5, п. Создание и использование внешних библиотек». Там же смотрите подробное описание процедур внешней библиотеки, их назначение, а также пример реализации и шаблоны файлов на *C* и *Pascal* для внешних библиотек.

Если в общем случае внешняя библиотека может иметь произвольное число входных и выходных сигналов, то внешняя библиотека, предназначенная для использования в скалярных силах типа *Библиотека (DLL)*, должна иметь три входных сигнала –  $x, v, t$  и один выходной – величину силы. Для шарнирной силы  $x$  и  $v$  – значения координаты и ее производной по времени, для биполярного силового элемента – это длина элемента и его производная по времени. В любом случае  $t$  – это текущее значение времени.

Обратите внимание, что внешняя библиотека, разработанная для использования в скалярных силах типа *Библиотека (DLL)* может быть подключена к модели механической системы также более общим способом с помощью **Мастера связи с внешними библио-**

**теками.** Однако подключение такой библиотеки через скалярную силу типа *Библиотека (DLL)* будет более эффективно с точки зрения вычислительных затрат при последующем моделировании динамики системы. Поэтому, по возможности, рекомендуется описывать и подключать математические модели сил из внешних библиотек через скалярную силу типа *Библиотека (DLL)*, а не с помощью **Мастера связи с внешними библиотеками**.

Математическая модель силы из внешней библиотеки может иметь собственный набор параметров. Этим параметры можно задать как численно, так и с помощью идентификаторов, что позволяет воспользоваться всеми преимуществами параметризации в ПК УМ.

### 2.6.2.13. Список сил

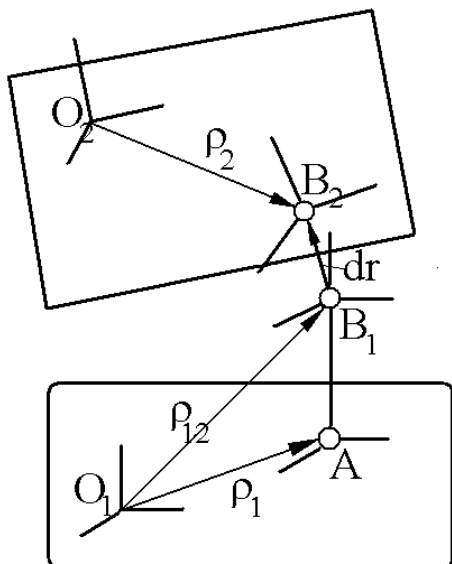
Список сил представляет собой отдельный тип силы, рассчитываемой как параллельное соединение любого числа силовых элементов описанных выше типов. Силы, производимые каждым элементом, складываются. Это позволяет создавать полезные комбинации сил, например, нелинейный гаситель с параллельной нелинейной пружиной, модель резинометаллического элемента с виде параллельного соединения нелинейного упругого элемента и нескольких упруго-диссипативных элементов и так далее.

Добавление элемента данного типа в модель см. Гл.3, п. *Ввод биполярных силовых элементов / Ввод списка сил*.

### 2.6.3. Обобщенный линейный силовой элемент

При моделировании многих технических систем, особенно транспортных, часто встречается силовой элемент, линейно зависящий от взаимного перемещения тел и скоростей их относительного движения, собственной динамикой которого можно пренебречь. К таким элементам относятся, например, пружина и демпфер (линейный гаситель колебаний). Для автоматического моделирования таких сил в УМ используются обобщенные линейные упругий и диссипативный силовые элементы. Элемент такого типа соединяет пару тел (одно из которых может быть базой). Одно из тел считается первым, другое – вторым.

Остановимся подробнее на модели упругого линейно-диссипативного силового элемента. На рисунке изображены два тела, точки  $A$  и  $B_2$  которых связаны упругим линейным силовым элементом. Системы координат СК1 и СК2, связанные с телом, имеют начала в точках  $O_1$  и  $O_2$ . Положения точек, соединенных элементом, определяются в СК каждого из тел векторами  $\rho_1^1, \rho_2^2$ , причем каждый из них должен быть задан в СК соответствующего тела.



В точке  $A$  тела 1 вводится система координат СКА, называемая *системой координат элемента*. Оси СКА произвольным образом ориентированы относительно СК1, а в простейшем и часто встречающемся случае – параллельны осям СК1.

Введем векторы относительного смещения  $dr$  и относительного поворота  $d\pi$  тел. С первым телом (номер 1) дополнительно связана точка  $B_1$ , задаваемая вектором  $\rho_{12}^1$ , в которой имеется система координат СКВ1, оси которой *параллельны* СКА. С точкой  $B_2$  второго тела также связана система координат, причем ее ориентация *может не совпадать* с ориентацией СК2. Точка  $B_1$  определяет положение второго конца элемента (то есть точки  $B_2$ ) при нулевом относительном смещении  $dr$ . Если системы координат, связанные точками  $B_1$  и  $B_2$  совпадают, то относительный поворот  $d\pi$  равен нулю.

Таким образом, при совпадении точек  $B_1$  и  $B_2$  и систем координат, связанных с ними, сила, действующая на второе тело и приведенная к точке  $B_1$ , принимает стационарное значение  $F_0$ , а момент равен нулю. Смещение точки  $B_2$  относительно  $B_1$  задает вектор  $dr$ , а поворот СКВ2 (СКА) относительно СКВ1 – вектор поворота  $d\pi$ . Эти величины предполагаются малыми и определяют величины силы и момента.

Рассмотрим теперь математическую модель силового элемента. В системе координат элемента СКА или в СКВ1 вектор силы  $F$  и момента  $M$ , действующие на *второе* тело и приведенные к точке  $B_2$ , определяются следующим выражением:

$$F = F_0 - C_{rr} dr - C_{ra} d\pi - D_{rr} v - D_{ra} \omega,$$

$$M = -C_{ar} dr - C_{aa} d\pi - D_{ar}^T v - D_{aa} \omega$$

для упруго-диссипативного и

$$F = -D_{rr} v - D_{ra} \omega,$$

$$M = -D_{ar}^T v - D_{aa} \omega$$

для диссипативного элемента. Здесь  $v = d\dot{r}$ ,  $\omega$  - угловая скорость второго тела относительно первого.

Эти выражения можно также переписать следующим образом:

$$G = G_0 - CdR - DV,$$

$$G = -DV,$$

вводя матрицы жесткости  $C$  и диссипации  $D$  размером  $6 \times 6$ , а также глобальные матрицы-столбцы

$$G = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}, G_0 = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}, dR = \begin{pmatrix} dr \\ d\pi \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

Приведем список параметров, задающих силовой элемент:

- $\rho_1, \rho_{12}, \rho_2$  - координаты точек А, В<sub>1</sub>, В<sub>2</sub>; точки А, В<sub>1</sub> должны быть заданы в СК1, в то время как точка В<sub>2</sub> должна быть определена в СК2;
- ориентации СКА относительно СК1, и СКВ<sub>2</sub> относительно СК2; для одновременного задания точки и связанной с ней системы координат в УМ могут быть использованы ориентированные точки связи;
- матрица жесткости  $C$  и/или диссипации  $D$ , а также стационарные силы  $F_0$  (по желанию); эти данные должны быть заданы в СКА.

Силовой элемент используется также моделирования *билинейной* пружины, то есть комплекта из двух пружин, в котором внутренняя пружина короче, чем внешняя и работает только после того, как продольная деформация внешней пружины становится больше разности высот. Такой элемент описывается двумя матрицами жесткости, дополнительно указывается разность высот.

*Обобщенный упругий линейный силовой элемент используется только в случае, когда тела совершают малые относительные движения.*

См. также п.2.6.6.4.

Примеры описания и/или использования:

- Гл.7. п. *Модели пружин*;
- `\samples\Manchester benchmarks\vehicle1`;
- `\samples\wedgetest`.

2.6.4. Контактные силы

2.6.4.1. Тип точка-плоскость (точка – Z-поверхность)

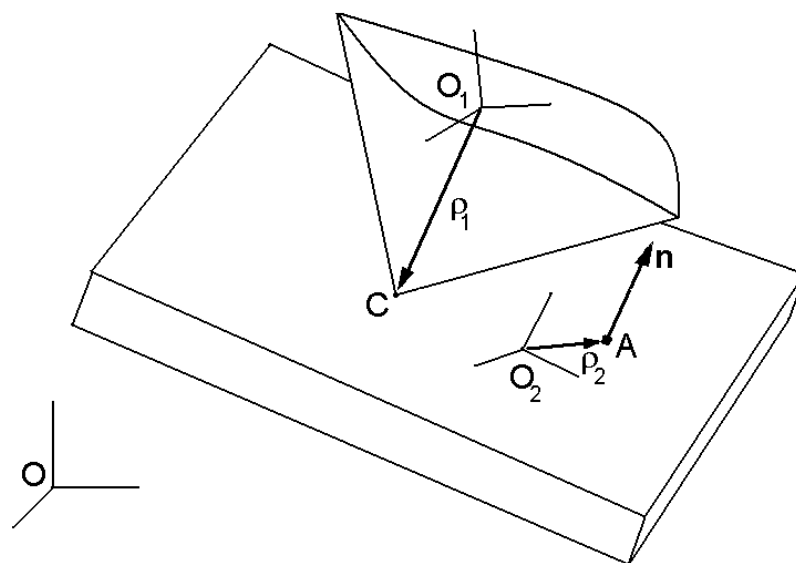


Рис. 2.28. Контактное взаимодействие типа точка-плоскость

Для моделирования простейших контактных взаимодействий в УМ используется силовой элемент типа “контакт точка-плоскость”. Отдельный силовой элемент соответствует контактным взаимодействиям пары тел (Рис. 2.28. Контактное взаимодействие типа точка-плоскость

), при котором с одним (первым) телом связывается набор точек (на Рис. 2.28. Контактное взаимодействие типа точка-плоскость

– единственная точка C), а с другим (вторым) – безграничная плоскость, определяемая одной точкой A и внешней нормалью n. Контактные точки, точка A и нормаль n задаются в СК соответствующих тел. Хотя на Рис. 2.28. Контактное взаимодействие типа точка-плоскость

для первого тела указана единственная точка контакта, их число не ограничено.

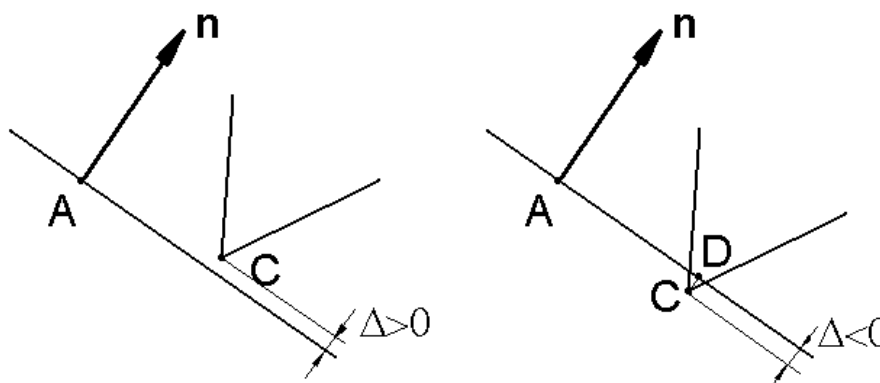


Рис. 2.29. Внедрение точки в плоскость

Контактные силы при взаимодействии отдельной точки с плоскостью равны нулю, если расстояние Δ между точкой и плоскость положительное (нет контакта, Рис. 2.29. , слева). При Δ < 0 (Рис. 2.29. , справа) возникает сила взаимодействия, имеющая две состав-

ляющие: нормальную реакцию  $\mathbf{N}$ , направленную по нормали к плоскости  $\mathbf{n}$ , и силу трения  $\mathbf{F}_f$ , лежащую в контактной плоскости.

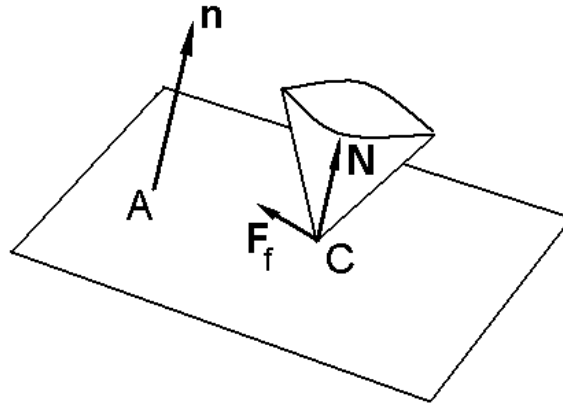


Рис. 2.30. Нормальная и касательная контактные силы

Для нормальной реакции используется следующая линейная вязко-упругая модель:

$$N = -c\Delta - d\dot{\Delta},$$

причем, если получаемое значение оказывается отрицательным, нормальная реакция полагается равной нулю (отсутствие прилипания). В формуле  $c, d$  – постоянные коэффициенты жесткости и диссипации контактного взаимодействия.

Для кулоновской силы трения существуют два режима: скольжения и сцепления. В режиме скольжения математическая модель силы следующая:

$$\mathbf{F}_f = -fN \mathbf{v}_s / \|\mathbf{v}_s\|,$$

где  $\mathbf{v}_s$  – вектор скорости скольжения (проекция на контактную плоскость скорости точки C относительно тела 2),  $f$  – коэффициент трения скольжения. Переход от режима скольжения к режиму сцепления осуществляется, когда скорость скольжения меняет свое направление на “противоположное”. При программной реализации этого критерия сравниваются векторы скорости скольжения на текущем и предыдущем шагах интегрирования. Если скалярное произведение данных векторов отрицательно, то происходит переход в режим сцепления и запоминаются значения вектора силы трения скольжения на предыдущем шаге (обозначим его  $\mathbf{F}_g$ ) и вектора AD (обозначим его  $\mathbf{r}_{g0}$ ), причем D – проекция точки C на контактную плоскость (Рис. 2.29).

В режиме сцепления используется следующая модель (соотношение задано в СК второго тела):

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{F}_g - c(\mathbf{r}_g - \mathbf{r}_{g0}) - d\mathbf{v}_s,$$

где  $\mathbf{r}_g$  – текущее значение вектора AD. Таким образом, при переходе к сцеплению точка контакта C “привязывается” к контактной плоскости линейным упруго-диссипативным элементом. Сила  $\mathbf{F}_g$  в формуле обеспечивает непрерывность изменения силы трения при переходе от скольжения к сцеплению.

Режим сцепления заканчивается при достижении силой трения предельного значения, то есть при выполнении условия

$$\|\mathbf{F}_f\| > f_0 N,$$

где  $f_0$  – коэффициент трения покоя,  $f_0 > f$ .

При описании силы следует указать:

- координаты контактных точек в СК первого тела;
- координаты точки и проекции внешней нормали в СК второго тела;

- параметры, характеризующие контактные силы: коэффициенты трения скольжения и покоя  $f, f_0$ , коэффициенты контактной жесткости и диссипации  $c, d$ .

В программе дополнительно реализован *режим близкого контакта*, при котором координаты точки А и нормаль  $\mathbf{n}$  к плоскости определяются автоматически. Данный режим может быть использован при следующих условиях:

- число точек контакта (принадлежат первому телу) не меньше трех;
- контактные точки лежат в одной плоскости;
- плоскость, в которой лежат контактные точки, в начальный момент времени близка к контактной плоскости, принадлежащей второму телу, то есть допускается небольшой зазор (малый по сравнению с расстояниями между точками контакта), а также небольшое отклонение нормалей.

При задании близкого контакта пользователь может задать величину зазора и отклонения нормали. При этом программа выполняет следующие действия по определению положения контактной плоскости второго тела.

- Определить внешнюю нормаль контактной плоскости второго тела  $\mathbf{n}_2$  по формуле:

$$\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 + \Delta\mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}_1$  – нормаль к плоскости контактных точек, построенная по первым трем заданным точкам,  $\Delta\mathbf{n}$  – отклонение нормали, заданное пользователем. В соответствии с данным подходом ввод точек контакта должен удовлетворять ряду правил. Во-первых, число точек должно быть не менее трех, во-вторых, первые три точки не должны лежать на одной прямой; в-третьих, последовательность задания точек имеет большое значение. Нормаль  $\mathbf{n}_1$  перпендикулярна плоскости треугольника, образованного точками, в ту сторону, откуда обход точек виден против часовой стрелки. Наконец, нормаль  $\mathbf{n}_1$  должна быть внешней для контактов первого тела (тогда вектор  $-\mathbf{n}_1$  предполагается внешним для контактной плоскости второго тела).

- Определяется положение точки А на контактной плоскости второго тела. В СК первого тела ее положение определяется формулой

$$\mathbf{r}_A = \rho_1 + \mathbf{n}_1 \delta,$$

где  $\delta$  – заданный пользователем зазор, а  $\rho_1$  – радиус-вектор *первой* точки контакта, введенной пользователем.

Перед началом моделирования динамики объекта, содержащего контактные силовые элементы в режиме близкого контакта, положение контактной плоскости рассчитывается заново по заданным начальным положениям тел.

**Замечание.** Модель силы **Точки - Z поверхность** в математическом плане практически совпадает с описанной выше, но контакт точек происходит не с плоскостью, а с поверхностью, заданной зависимостью типа  $z = f(x, y)$ . Режим близкого контакта не предусмотрен в данном случае.

Особенности использования контактных сил данного типа в режиме линейного анализа см. Гл.4, п. *Линейный анализ / Равновесие при наличии контактных сил*

**2.6.4.2. Контакт точка-кривая**

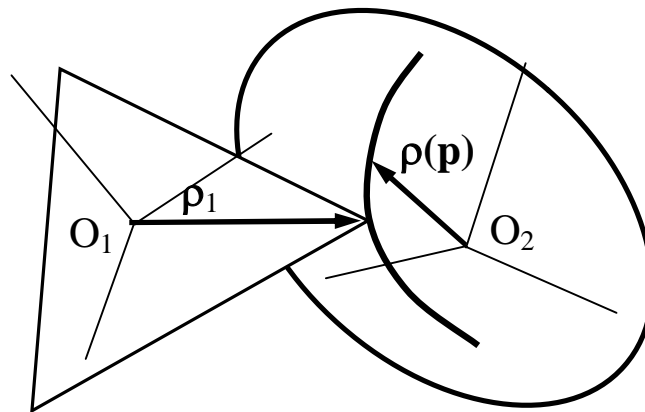


Рис. 2.31. Контакт точки с кривой

Данный тип контактного взаимодействия реализует скольжение с небольшим отклонением точки первого тел по пространственной кривой, фиксированной по отношению ко второму телу.

Положение контактной точки в СК1 задается постоянным вектором  $\rho_1$ .

В общем случае уравнение кривой в СК2 задается параметризованной зависимостью координат точек на кривой от скалярного параметра  $p$  (верхний индекс соответствует номеру СК)

$$\rho^2 = \rho^2(p), \quad p \in [p_{\min}, p_{\max}],$$

где  $\rho^2$  - радиус-вектор точки на кривой в СК2. Та же кривая в скалярном виде задается тремя соотношениями

$$x_2 = x_2(p), \quad y_2 = y_2(p), \quad z_2 = z_2(p),$$

$$\rho^2 = (x_2, y_2, z_2)^T$$

Будем различать следующие типы кривых:

- разомкнутая кривая, концевые точки которой различны,  $\rho^2(p_{\min}) \neq \rho^2(p_{\max})$ ;
- замкнутая кривая с совпадающими концевыми точками,  $\rho^2(p_{\min}) = \rho^2(p_{\max})$ ;
- периодическая кривая: замкнутая кривая с гладким сопряжением концевых точек (совпадение касательных)  $\rho'^2(p_{\min}) = \rho'^2(p_{\max})$ ; здесь штрих соответствует производной по параметру  $p$ .

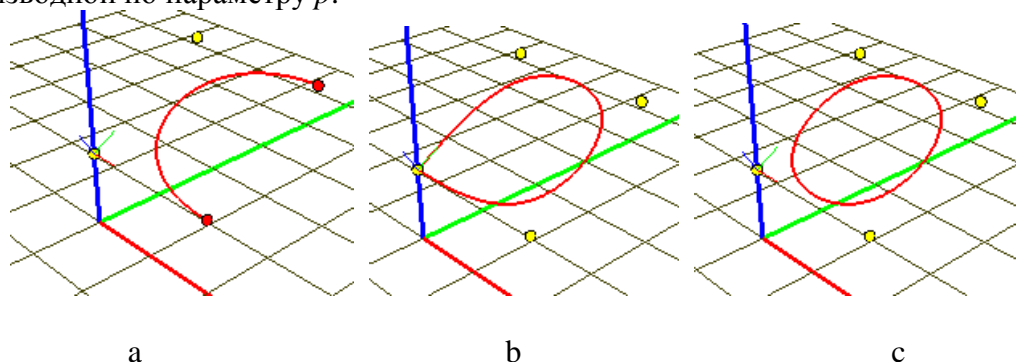


Рис. 2.32. Примеры кривых различных типов

На Рис. 2.32 представлены разомкнутая (а), замкнутая (b) и периодическая (c) кривые.

Каждая из двух концевых точек незамкнутой кривой может быть *удерживающей* или *неудерживающей*. Удерживающая точка не позволяет контактной точке покинуть кривую через эту концевую точку. При переходе через неудерживающую концевую точку контакт разрывается.

Особыми точками назовем удерживающие концевые точки разомкнутой кривой и точки кривой, в которых происходит разрыв производной (скачок касательной, см. Рис. 2.32 b).

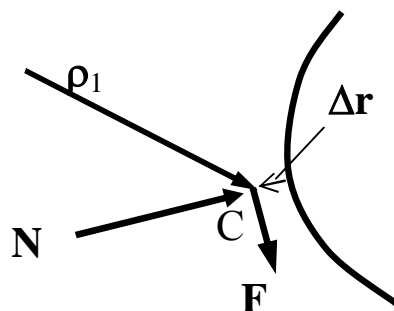


Рис. 2.33. К расчету сил взаимодействия точки с кривой в неособой точке

При контакдном взаимодействии точки с кривой вне особых точек возникают две силы: нормальная сила  $\mathbf{N}$ , перпендикулярная кривой, и сила трения  $\mathbf{F}$ , направленная по касательной к кривой. Вектор нормальной силы, действующей на контактную точку  $C$ , рассчитывается по формуле (Рис. 2.33)

$$N = -c\Delta r - v\Delta \dot{r}$$

где  $\Delta r$  - вектор *минимального* отклонения точки от кривой, то есть вектор, направленный вдоль прямой минимального расстояния от контактной точки до кривой;  $c$  и  $v$  - линейной контактной жесткости и диссипации.

Сила трения реализована в двух режимах: скольжение и сцепление. Модель силы трения аналогична описанной в контактном взаимодействии точки с плоскостью.

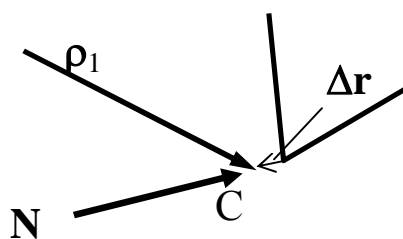


Рис. 2.34. К расчету сил взаимодействия точки с кривой в особой точке

Если контакт происходит в особой точке, Рис. 2.34, то сила трения отсутствует, а нормальная сила зависит от отклонения контактной точки от особой точки на кривой по приведенной выше зависимости.

**Замечание.** При достаточно большой жесткости отклонение точки от кривой является малым. Значение контактной жесткости и диссипации следует выбирать в соответствии с методикой, описанной в п. 2.7. Методика расчета параметров контакта, стр. 2-79.

### 2.6.4.3. Другие типы контактных сил

Кроме контакта типа **Точка - Плоскость**, в УМ реализованы и другие:

- **Сфера - Плоскость;**
- **Окружность - Плоскость;**
- **Сфера - Сфера;**
- **Сфера - Z поверхность;**
- **Окружность - Z поверхность.**

Все они описывают силовое взаимодействие при качении друг по другу тел различной формы. Математические модели аналогичны модели, описанной в п.2.6.4.1.

Сначала определяется «точка контакта» – путём минимизации расстояния между поверхностями (например, между сферой и плоскостью, между двумя сферами и т.п.).

Модель нормальной контактной силы полностью совпадает с базовой моделью.

Модель касательной силы несколько отличается от базовой модели тем, что реализован только режим скольжения. Модель касательной силы имеет вид «модифицированной сигнатуры»

$$\mathbf{F}_f = \begin{cases} -fN \mathbf{v}_s / \|\mathbf{v}_s\|, & \|\mathbf{v}_s\| > v_s^*, \\ -fN \mathbf{v}_s / v_s^*, & \|\mathbf{v}_s\| \leq v_s^*, \end{cases}$$

где (см. п. 2.6.4.1)  $f$  – коэффициент трения скольжения;  $N$  – модуль нормальной контактной силы;  $\mathbf{v}_s$  – вектор скорости скольжения;  $v_s^*$  – предельное значение скорости. То есть при больших скоростях скольжения используется модель сухого трения в виде сигнатуры, а при малых (меньше  $v_s^*$ ) – модель вязкого трения. Значение  $v_s^*$  принимается численно равным  $0,01R$ , где  $R$  – характерный размер (радиус) контактирующих тел.

В модели отсутствует режим близкого контакта.

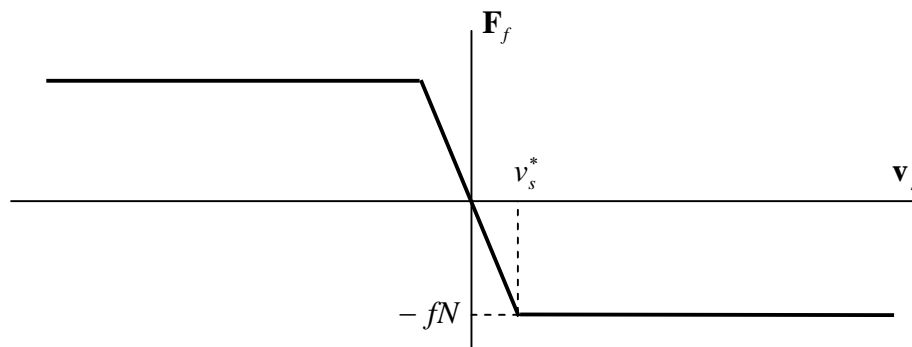


Рис. 2.35. Модифицированная сигнатура

### 2.6.5. 3D контакт

В версии 5.0 ПК «Универсальный механизм» реализована модель контакта между твердыми телами на основе связанных с телами контактных многообразий, описанных с помощью графических объектов.

Реализованный метод предназначен для моделирования контактного взаимодействия между двумя **выпуклыми полиэдрами**. Метод рассматривает взаимодействие между недеформируемыми телами с малыми взаимными внедрениями тел. Метод состоит из двух частей: обнаружение столкновений/взаимопересечений (collision detection) для выпуклых полиэдров и последующий расчет контактных сил. Расчет взаимодействий использует алгоритм трехмерного отсечения Сайруса-Бека<sup>1</sup>, изложенный в [2]. Расчет контактных сил основывается на модели контакта типа «точка-плоскость» и рассчитывается как сумма нормальной упруго-диссипативной силы и касательной силы сухого трения, см. п. 2.6.4.1.

#### Расчет взаимодействий

Для ускорения вычислительного процесса расчет взаимодействий разбивается на, так называемый, расчет *дальнего* и *ближнего* контакта. Расчет дальнего контакта – это быстрый алгоритм, который выявляет пары тел для дальнейшего, обычно более затратного с точки зрения вычислительных затрат, расчета ближнего контакта. Алгоритм расчета дальнего контакта окружает полиэдры сферами и проверяет пересечение этих сфер на каждом шаге численного интегрирования. Для полиэдров, прошедших через отбор дальнего контакта, выполняется расчет ближнего контакта.

Алгоритм расчета ближнего контакта основан на использовании широко известного в компьютерной графике обобщенного алгоритма трехмерного отсечения Сайруса-Бека, который позволяет определить находится ли некий отрезок полностью или частично внутри выпуклого полиэдра. Обобщая алгоритм Сайруса-Бека на контактные многообразия, связанные с телами, расчет ближнего контакта возвращает отрезки ребер одного полиэдра, которые находятся внутри другого полиэдра, см. Рис. 2.36.

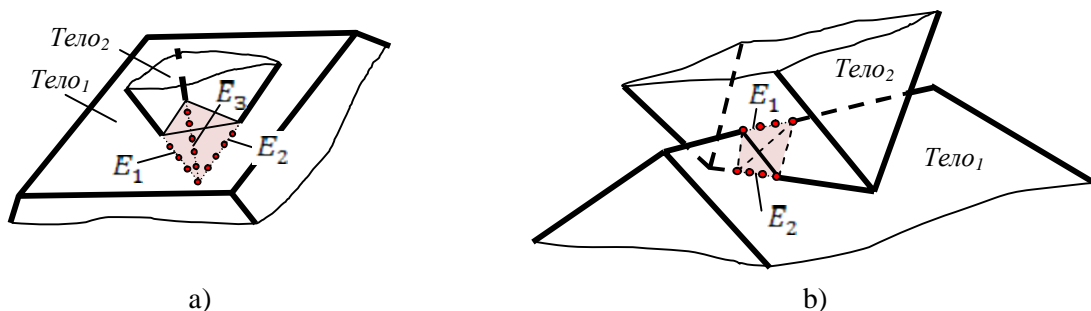


Рис. 2.36. Случаи внедрения типа «Вершина-Грань» и «Ребро-Ребро»

Так в примере, рассмотренном на Рис. 2.36а, расчет ближнего контакта даст множество отсеченных частей ребер  $\{E1, E2, E3\}$  для  $Тело_1$ , и пустое множество ребер для  $Тело_2$ , а также  $\{E1\}$  для  $Тело_1$  и  $\{E2\}$  для  $Тело_2$  на Рис. 2.36б.

#### Расчет контактных сил

После расчета ближнего контакта необходимо выполнить расчет контактных сил. Рассмотрим некоторую пару полиэдров. Имея рассчитанное на предыдущем шаге множество отсеченных ребер одного полиэдра алгоритм расчета контактных сил расставляет контактные точки на этом ребре. Шаг между соседними контактными точками является па-

<sup>1</sup> В некоторых переводах называется алгоритмом Цируса-Бека

раметром модели и зависит от характерных размеров взаимодействующих полиэдров. Далее для каждой контактной точки определяется ближайшая грань второго полиэдра. Как только определено положение контактной точки и плоскости (грани) становится возможным контактную силу  $R$  которая вычисляется как суперпозиция нормальной упруго-диссипативной силы  $N$  и касательной силы сухого трения  $F_f$ .



Рис. 2.37. Контактные точки и силы

Реализованный подход к расчету контактных сил хорошо работает для двух типичных случаев внедрения: вершина-грань и ребро-ребро.

Так как классический алгоритм Сайруса-Бека оперирует только выпуклыми полиэдрами, то рассмотренный здесь метод расчета контактных сил возможно применить только для выпуклых полиэдров. Вместе с тем, данный алгоритм может быть расширен и на невыпуклые полиэдры, если таковые будут предварительно разбиты на выпуклые.

### 2.6.6. Специальные силы

В текущей версии программы к специальным силам относятся следующие типы сил:

- Зубчатое зацепление
- Комбинированное трение
- Кулачок
- Пружина

#### 2.6.6.1. Зубчатое зацепление

Зубчатое зацепление реализовано в УМ в виде упрощенной модели контактного взаимодействия шестеренок в зацеплении. С помощью силового элемента данного типа можно моделировать плоские передачи (внешние и внутренние зацепления) и конические передачи с учетом возможного люфта (зазора между зубьями) и податливости передачи, приведенной к контактной точке.

Модель задается следующими параметрами (Рис. 2.38):

- точками на осях валов А и В, совпадающими с центрами шестеренок; координаты точек задаются в СК соответствующего тела;
- векторами, перпендикулярными плоскостям шестеренок; проекции векторов задаются в СК соответствующего тела;
- передаточным числом зацепления (отношением радиуса *первой* шестеренки  $R_1$  к радиусу второй  $R_2$ );
- величиной зазора  $\delta$ ;
- коэффициентом жесткости передачи, приведенном к точке контакта  $c$  (Н/м);
- коэффициентом диссипации передачи, приведенном к точке контакта  $d$  (Нс/м);
- типом зацепления внешнее или внутреннее (только для плоской передачи).

Радиусы колес рассчитываются программой автоматически по перечисленным выше данным.



Рис. 2.38.

В математическом плане модель соответствует силе, действующей по касательной к окружности, определяемой формулой (сила действует на второе тело, на первое – противоположная)

$$F = \begin{cases} -c(\Delta - \delta/2) - d\dot{\Delta}, & \Delta > \delta/2 \\ -c(\Delta + \delta/2) - d\dot{\Delta}, & \Delta < -\delta/2, \\ 0, & |\Delta| < \delta/2 \end{cases}$$

$$\Delta = R_2\varphi_2 \pm R_1\varphi_1.$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота первой и второй шестеренки относительно плоскости, проходящей через оси вращения. Знак минус в выражении для  $\Delta$  соответствует внешнему зацеплению.

**Замечания.**

1. При задании параметров зацепления следует учитывать, что оси вращения шестеренок должны находиться в одной плоскости.
2. При моделировании объекта начальные значения скоростей рассчитываются с использованием закладки задания начальных условий.

### 2.6.6.2. Комбинированное трение

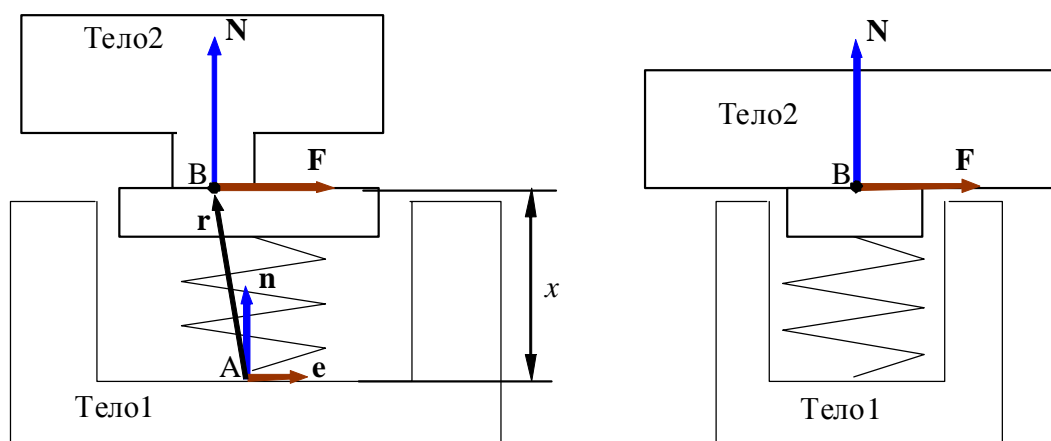


Рис. 2.39. Расчетная модель силового элемента типа «Комбинированное трение»: контактная точка В принадлежит телу 2 (слева) или невесомому телу 1 (справа)

Модель является обобщением контактного взаимодействия типа точка-плоскость. В контактом взаимодействии находятся тело 2 и невесомое тело. Контактная точка В, принадлежащая либо телу 2, либо невесомому телу, может скользить по контактной плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}$ , Рис. 2.39. Невесомое тело связано с телом 1 силовым элементом и может смещаться относительно тела 1 вдоль оси элемента  $\mathbf{n}$ . В режиме с фиктивным телом невесомое тело также может смещаться относительно тела 1 в одном или двух поперечных направлениях. Модель силового взаимодействия тел 1 и 2 включает нормальную силу  $N$ , направленную параллельно вектору  $\mathbf{n}$ , и перпендикулярную ей силу трения, которая в режиме скольжения линейно зависит от нормальной силы:  $F = \mu |N|$ .

Основным **отличием** комбинированного трения от контакта точка-плоскость являются следующие его особенности.

- Возможность задания произвольной нелинейной характеристики для зависимости нормальной силы от смещения вдоль элемента
- Возможность поперечного смещения невесомого тела
- Наличие ограничений на поперечные смещения как фиктивного тела относительно тела 1, так и тела 2 относительно фиктивного тела.

Силовой элемент, связывающий тело 1 с невесомым телом, прикрепляется к точке А тела 1. Предполагается, что контактная плоскость в процессе движения относительно точки А остается все время в положительном направлении, задаваемым вектором  $\mathbf{n}$ . Расстояние  $x = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0$  от точки А до контактной плоскости является переменным.

**Нормальная сила** в данной модели является функцией расстояния  $x$ , первой производной от расстояния по времени  $v$  и от времени  $t$  (см. п. 2.6.2),

$$N = N(x, v, t).$$

Предусмотрены следующие режимы нормальной силы:

- *односторонняя*, когда силы полагаются равными нулю при  $N < 0$ , то есть точка отрывается от поверхности в момент, когда  $N = 0$ .
- *двухсторонняя*, когда нормальная сила может быть отрицательной.

Как правило, силовой элемент используется в одностороннем режиме, то есть с отрывом от поверхности.

Для **силы трения** учитываются два режима: сцепление и скольжение. В двумерной модели (2D) этого элемента сила трения направлена вдоль прямой, жестко связанной с первым телом, в трехмерном же случае (3D) сила трения всегда лежит в плоскости, перпендикулярной оси элемента.

В любом случае тело, по которому скользит с трением Тело2 считается невесомым, однако различаются два режима учета этого невесомого тела: **без фиктивного тела и с фиктивным телом**. В свою очередь, в режиме фиктивного тела в 2D модели элемента возможно введение ограничений на перемещения фиктивного тела относительно тела 1 или тела 2 относительно фиктивного тела.

Список параметров, задающих модель силового элемента:

- координаты точек A, B в СК1 и СК2 соответственно;
- проекции вектора  $\mathbf{n}$  в СК1;
- модель нормальной силы  $N$ ;
- тип силы  $N$ : односторонняя или двухсторонняя;
- тип элемента 2D или 3D;
- коэффициенты трения скольжения и покоя для силы трения  $F$ ;
- единичный вектор  $\mathbf{e}$  в СК1, задающий направление силы трения при типе элемента 2D;
- коэффициенты контактной поперечной жесткости  $c, d$  в режиме сцепления по трению (требуется не для всех режимов реализации элемента);
- коэффициенты поперечной жесткости и диссипации  $c_y, d_y$  связи фиктивного тела с телом 1 (требуются только для режимов с фиктивным телом);
- тип ограничений и параметры зазоров в поперечном направлении (требуются не для всех режимов реализации элемента).

#### 2.6.6.2.1. Режим без фиктивного тела

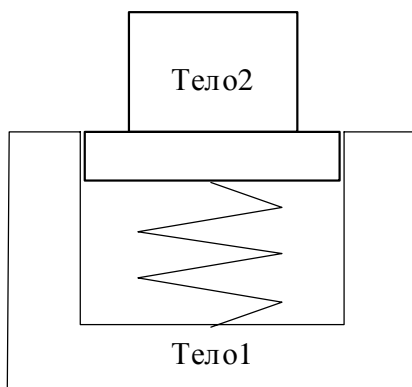


Рис. 2.40. Расчетная модель элемента типа «Комбинированное трение» при отсутствии фиктивного тела

*Режим реализован как для 2D, так и для 3D модели элемента.*

Предполагается, что тело нулевой массы, по которому скользит тело 2, может перемещаться только по оси элемента и не может сдвигаться в поперечном направлении, Рис. 2.40. В этом случае имеем силовой элемент, который в поперечном направлении реализует стандартную силу трения, которую в простейшем случае можно реализовать контактным элементом типа точка-плоскость, п. 2.6.4.1. В отличие от контакта типа точка-плоскость нормальная реакция может нелинейно зависеть от вертикального перемещения и скорости.

Комбинированное трение в данном режиме может быть реализовано эквивалентной многомассовой моделью: вводится тело малой массы (тело 3), которое имеет одну поступательную степень свободы относительно тела 1 и связано с ним силовым элементом, изображенным в виде пружины на Рис. 2.40. Между телом 2 и телом 3 вводится одна или несколько контактных точек типа точка-плоскость. Такая модель будет близка по поведению комбинированному трению, однако вводит дополнительное тело, степень свободы, и силы, то есть приводит к замедлению расчетов. Кроме того, при малой массе тела 3 система становится жесткой и возможно дробление шага интегрирования. Таким образом, комбинированное трение позволяет упростить модель и ускорить процесс моделирования.

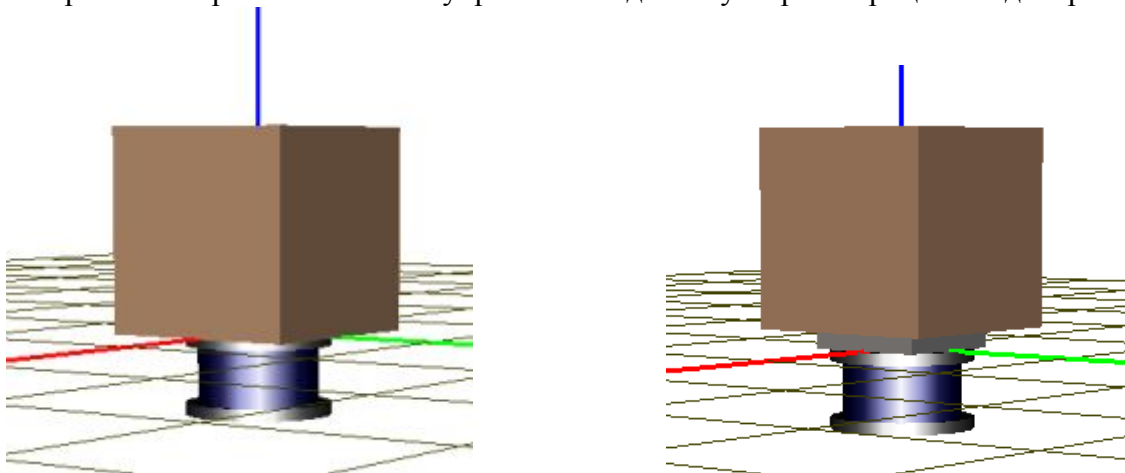


Рис. 2.41. Примеры комбинированного трения без фиктивного тела (слева) и с третьим телом

### Пример.

Модели:

`\samples\Tutorial\CombFriction\CF2D_without_fict`

`\samples\Tutorial\CombFriction\CF2D_without_fict_MBS`

Рассмотрим пример иллюстрирующий использование комбинированного трения без фиктивного тела и подтверждающий корректность реализованной математической модели элемента. Две модели, которые сравниваются в данном примере, изображены на **Рис. 2.41**, внешне похожи, однако первая из них содержит элемент комбинированное трение, а второй – его многомассовый аналог. Верхнее тело совершает гармонические колебания по горизонтали и опирается на силовой элемент (первая модель) или на тело малой массы через контактную силу (вторая модель). Тело имеет также вертикальную степень свободы, по которой может действовать периодическая сила. Подробный разбор и сравнение моделей приведены в Главе 7, здесь же мы укажем главный результат.

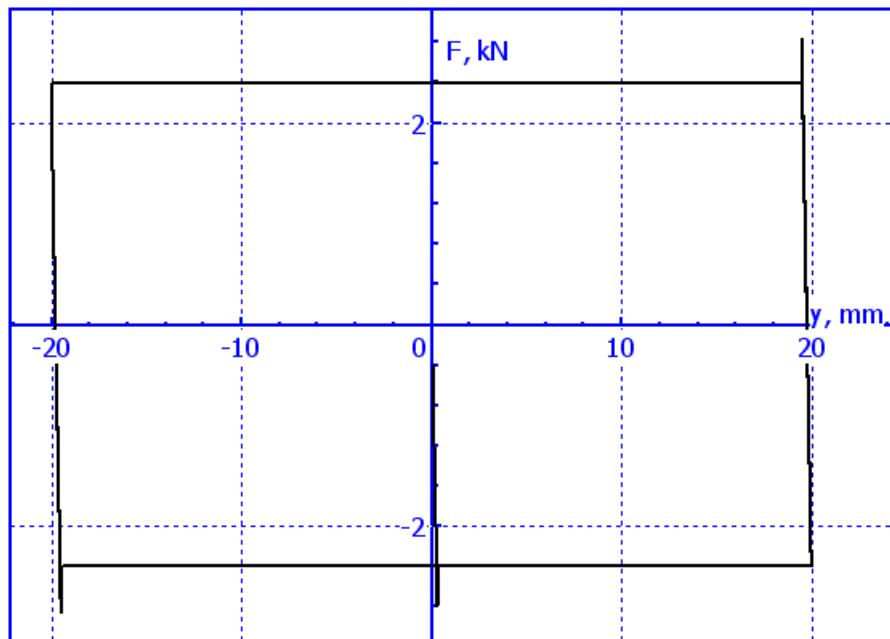


Рис. 2.42. Гистерезис силы трения при постоянной нормальной силе

При постоянной вертикальной нагрузке в обоих случаях для зависимости силы трения от поперечного смещения тела получается практически одинаковый результат, изображенный на **Рис. 2.42**.

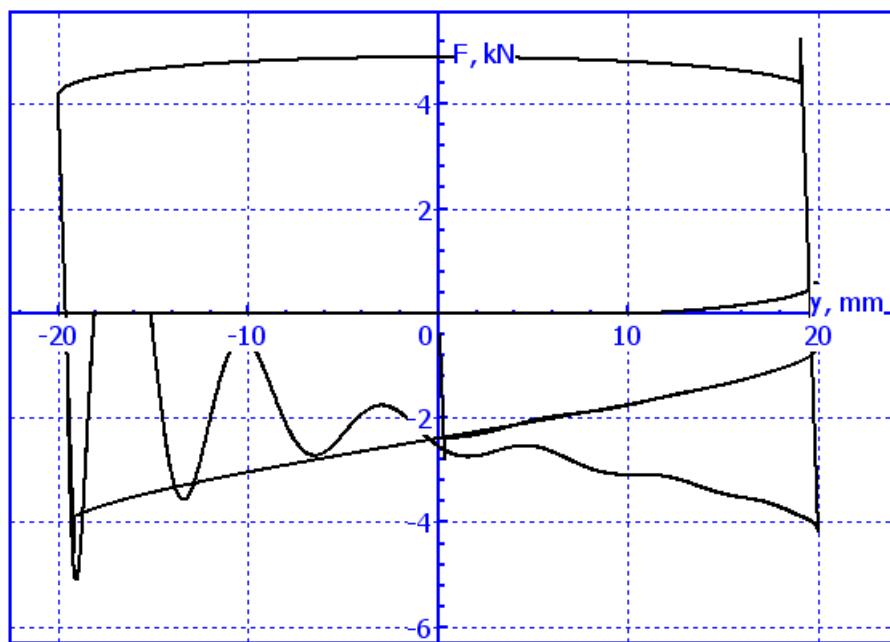


Рис. 2.43. Гистерезис силы трения при переменной нормальной силе

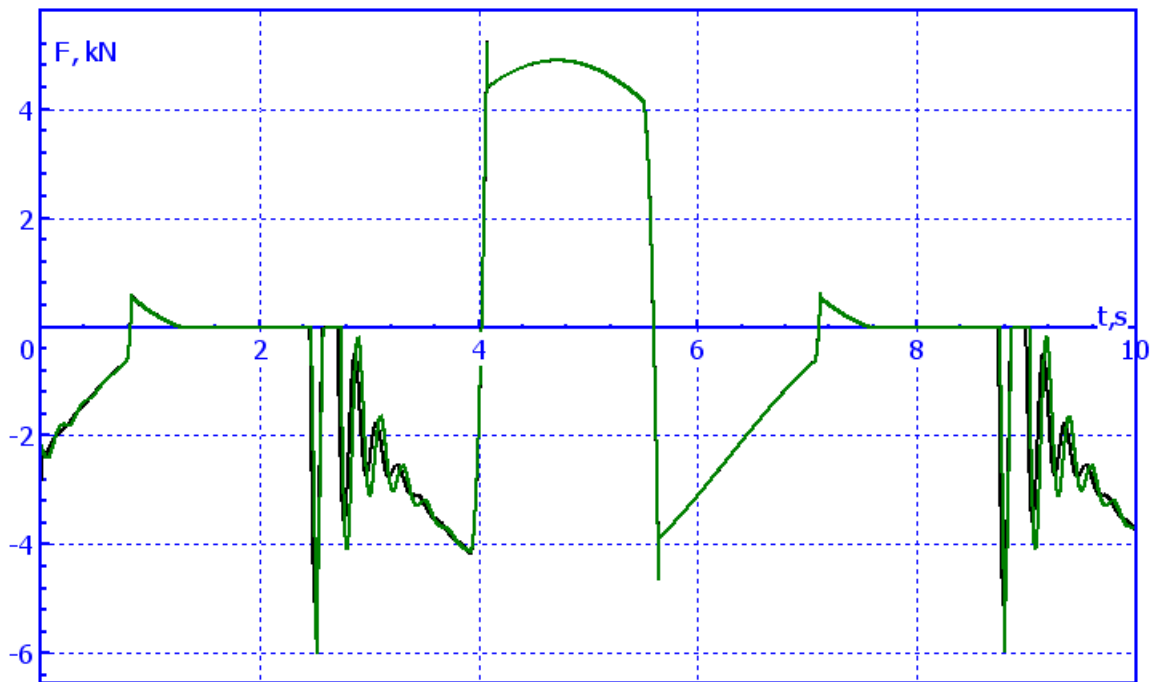


Рис. 2.44. Сравнение зависимости силы трения от времени

При переменной вертикальной нагрузке, когда включается периодическая вертикальная сила, зависимость силы трения от поперечного смещения тела имеет очень похожий вид, см. **Рис. 2.43** (график построен для первой модели). Небольшое расхождение в зависимостях силы от времени на Рис. 2.44 для моделей наблюдается только при отрывах тела от контактной поверхности при последующих ударах.

Близость результатов обосновывает корректность упрощения, реализованного в модели комбинированного трения.

**2.6.6.2.2. Режим с фиктивным телом без ограничений**

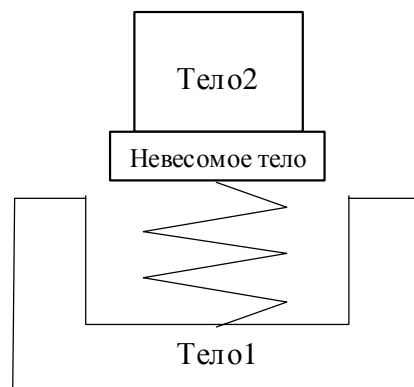


Рис. 2.45. Модель с фиктивным телом без ограничений

*Режим реализован как для 2D, так и для 3D модели элемента.*

Предполагается, что тело нулевой массы (фиктивное тело), по которому скользит тело 2, может дополнительно перемещаться параллельно контактной плоскости, Рис. 2.45. Таким образом, фиктивное тело в касательно плоскости имеет 2 степени свободы для 3D элемента и одну – для 2D.

При смещениях фиктивного тела относительно тела 1 в поперечном направлении возникает линейная упруго-диссипативная сила  $R$  с коэффициентами жесткости и диссипа-

ции  $c_y, d_y$ . Назовем *касательной* плоскость, в которой смещается фиктивное тело в поперечном направлении.

В режиме сцепления смещение фиктивного тела полностью определяются движением в касательной плоскости точки В тела 2.

В режиме скольжения смещение тела определяется из уравнений равенства нулю суммы сил, действующих на тело с нулевой массой

$$R = F,$$

где  $R, F$  упруго-диссипативная сила и сила трения, действующая на тело 2.

Для **3D** элемента это уравнение дает два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} -d_y \dot{x} - c_y x &= \mu N \frac{(\dot{x} - v_{2x})}{v_s}, \\ -d_y \dot{y} - c_y y &= \mu N \frac{(\dot{y} - v_{2y})}{v_s}. \end{aligned}$$

Здесь

$x, y$  - координаты фиктивного тела в касательной плоскости;

$v_{2x}, v_{2y}$  - проекции на касательную плоскость скорости точки В тела 2 относительно тела 1;

$\dot{x} - v_{2x}, \dot{y} - v_{2y}$  - скорость проскальзывания точки В по контактной плоскости фиктивного тела;

$$v_s = \sqrt{(\dot{x} - v_{2x})^2 + (\dot{y} - v_{2y})^2} \text{ - модуль скорости скольжения.}$$

Данная система нелинейных дифференциальных уравнений должна решаться численно совместно с уравнениями движения моделируемого объекта. Считая нормальную реакцию  $N$  постоянной в пределах одного шага интегрирования и выполняя приближенную замену

$$x = x_p + v_x h, \quad y = y_p + v_y h,$$

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}$$

дифференциальные уравнения заменяются линейными алгебраическими уравнениями, относительно неизвестных скоростей  $v_x, v_y$  фиктивного тела, для решения которых на каждом шаге интегрирования используется метод Ньютона-Рафсона. В выражениях замены введен шаг интегрирования  $h$  и значения координат фиктивного тела на предыдущем шаге интегрирования. Заметим, что указанная процедура эквивалентна использованию неявного метода Эйлера для решения дифференциальных уравнений.

Для **2D** элемента остается одно уравнение, соответствующее смещению точки В вдоль оси трения, задаваемой вектором  $\mathbf{e}$ , **Рис. 2.40**.

$$-d_y \dot{x} - c_y x = \mu N \frac{(\dot{x} - v_{2x})}{|\dot{x} - v_{2x}|} = F.$$

В пределах одного шага интегрирования это уравнение может быть проинтегрировано аналитически в предположении, что сила  $N$  в течение шага постоянна и скорость проскальзывания не меняет знак. В этом случае сила  $F$  в правой части уравнения является постоянной и справедливо соотношение

$$x = \left(x_p + \frac{F}{c_y}\right) e^{-\frac{c_y}{d_y}(t-t_p)} - \frac{F}{c_y}.$$

Здесь  $x_p = x(t_p)$  - значение координаты  $x$  на предыдущем шаге интегрирования в момент времени  $t_p$ .

Комбинированное трение в данном режиме может быть реализовано эквивалентной многомассовой моделью, которая описана в предыдущем пункте. Только тело малой массы имеет не одну, а три (3D) или две (2D) поступательные степени свободы относительно тела 1.

**Пример.**

Модели:

`\samples\Tutorial\CombFriction\CF2D_with_fict`

`\samples\Tutorial\CombFriction\CF2D_with_fict_MBS`

Рассмотрим пример иллюстрирующий использование комбинированного трения с фиктивным телом без ограничений и подтверждающий корректность реализованной математической модели элемента, **Рис. 2.41**. Общая структура моделей такая же, как в примере п. 2.6.6.2.1. Отличие в модели комбинированного трения заключается в том, что включен режим фиктивного тела. Тестовое сравнение моделей, приведенное на Рис. 2.46 показывает корректность математической модели комбинированного трения с фиктивным телом.

**Замечание.** Многомассовая модель в некоторых случаях имеет преимущество по сравнению с комбинированным трением, поскольку позволяет моделировать возникновение в конструкции такого типа автоколебательных процессов.

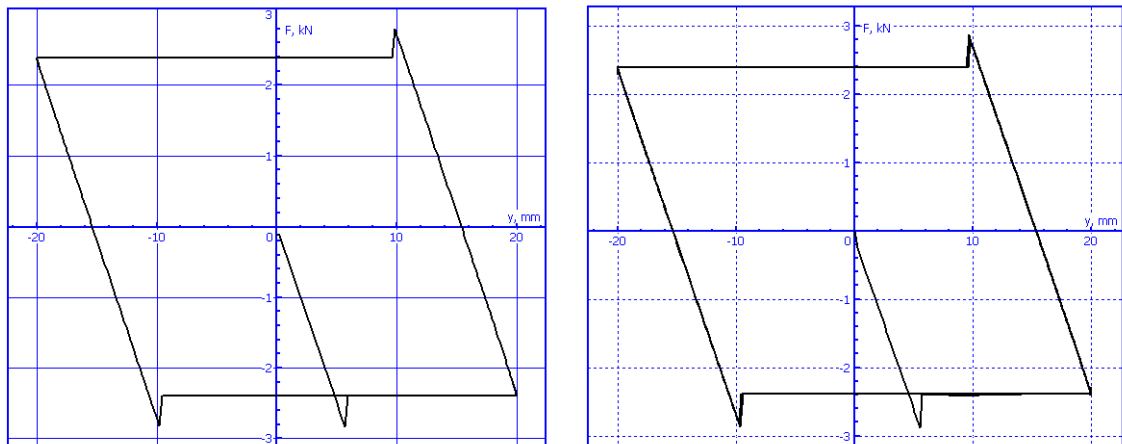


Рис. 2.46. Гистерезис силы трения при постоянной нормальной силе для комбинированного трения (слева) и для многомассовой системы (справа)

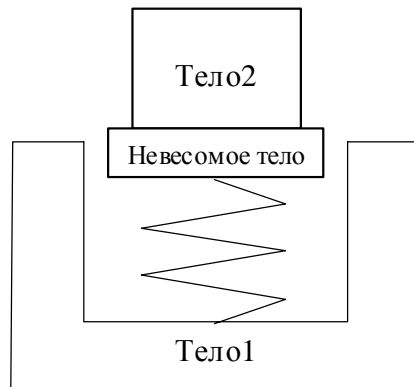
**2.6.6.2.3. Режим с ограничением для фиктивного тела**

Рис. 2.47. Ограничение на поперечное смещение фиктивного тела

*Режим реализован только для 2D элемента в режиме с фиктивным телом*

В данном режиме поперечное смещение фиктивного тела ограничено, Рис. 2.47, так что

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}], x_{\min} < 0, x_{\max} > 0,$$

где  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$  - предельные значения координаты фиктивного тела.

**Пример.**

Модель:

`\samples\Tutorial\CombFriction\CF2D_with_fict_limit_fict`

Рассмотрим пример иллюстрирующий использование комбинированного трения с фиктивным телом. Общая структура моделей такая же, как в примере п. 2.6.6.2.1. Тестовый расчет силы трения при гармоническом поперечном колебании тела 2 относительно тела 1 с амплитудой 20 мм приведен на Рис. 2.48. Установлен поперечный зазор 10 мм на сторону.

**Замечание.** Если фиктивное тело не выходит на ограничение, то модель силового элемента совпадает с п. 2.6.6.2.2.

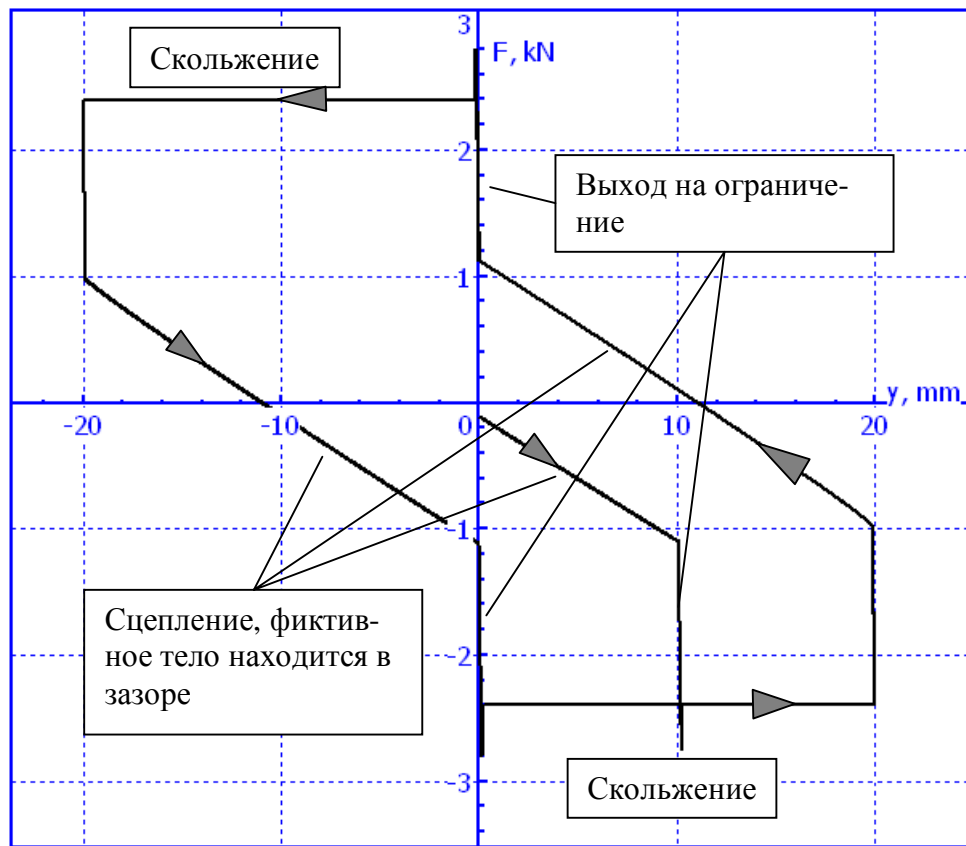


Рис. 2.48. Гистерезис элемента с ограничением на перемещение фиктивного тела

### 2.6.6.2.4. Режим с ограничением для тела 2

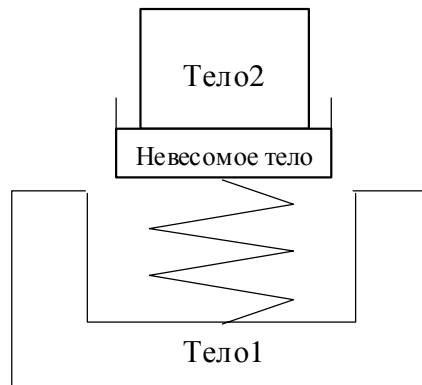


Рис. 2.49. Ограничение на поперечное смещение тела 2 относительно фиктивного тела

*Режим реализован только для 2D элемента в режиме с фиктивным телом.*

В данном режиме поперечное смещение тела 2 относительно фиктивного тела  $\Delta x_2$  ограничено, Рис. 2.49, так что

$$\Delta x_2 \in [x_{\min}, x_{\max}], \quad x_{\min} < 0, \quad x_{\max} > 0,$$

где  $x_{\min}, x_{\max}$  - предельные значения смещения тела 2 относительно фиктивного тела.

#### Пример.

Модель:

`\samples\Tutorial\CombFriction\CF2D_with_fict_limit_body2`

Рассмотрим пример иллюстрирующий использование комбинированного трения с фиктивным телом и с ограничением на смещение второго тела относительно фиктивного. Общая структура моделей такая же, как в примере п. 2.6.6.2.1. Тестовый расчет силы трения при гармоническом поперечном колебании тела 2 относительно тела 1 с амплитудой 20 мм приведен на Рис. 2.50. Установлен поперечный зазор 10 мм на сторону.

**Замечание.** Если тело 2 не выходит на ограничение, то модель силового элемента совпадает с п. 2.6.6.2.2.

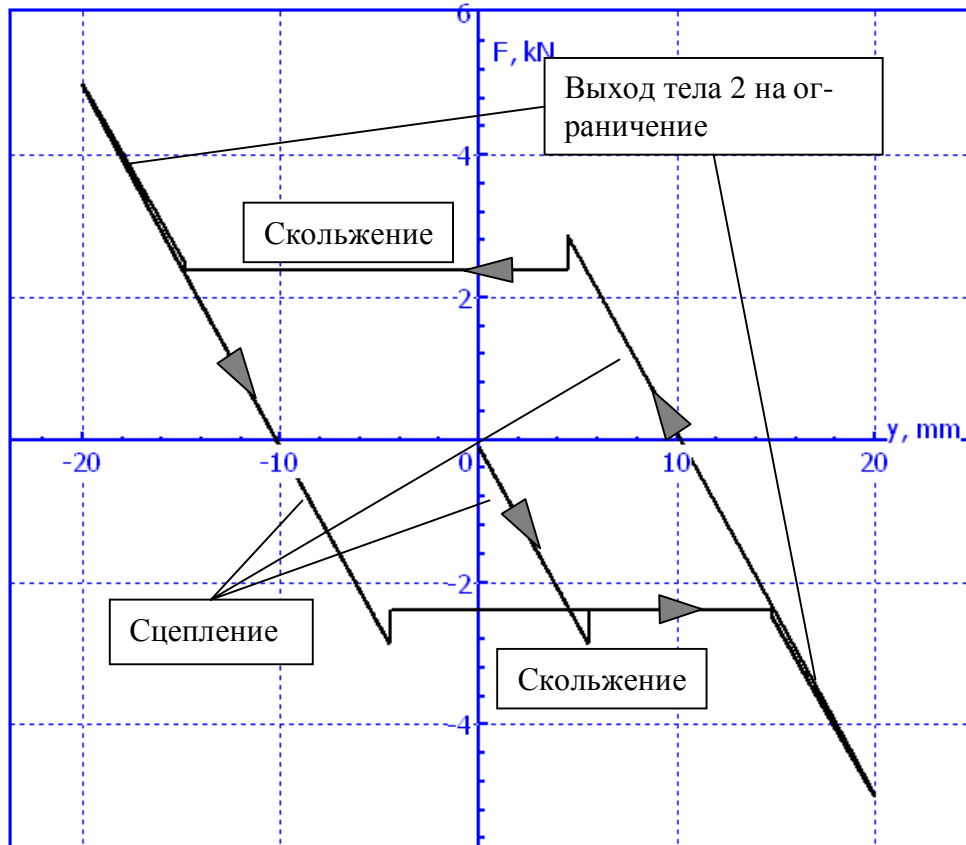


Рис. 2.50. Гистерезис элемента с ограничением на перемещение тела 2 относительно фиктивного тела

### 2.6.6.3. Кулачок

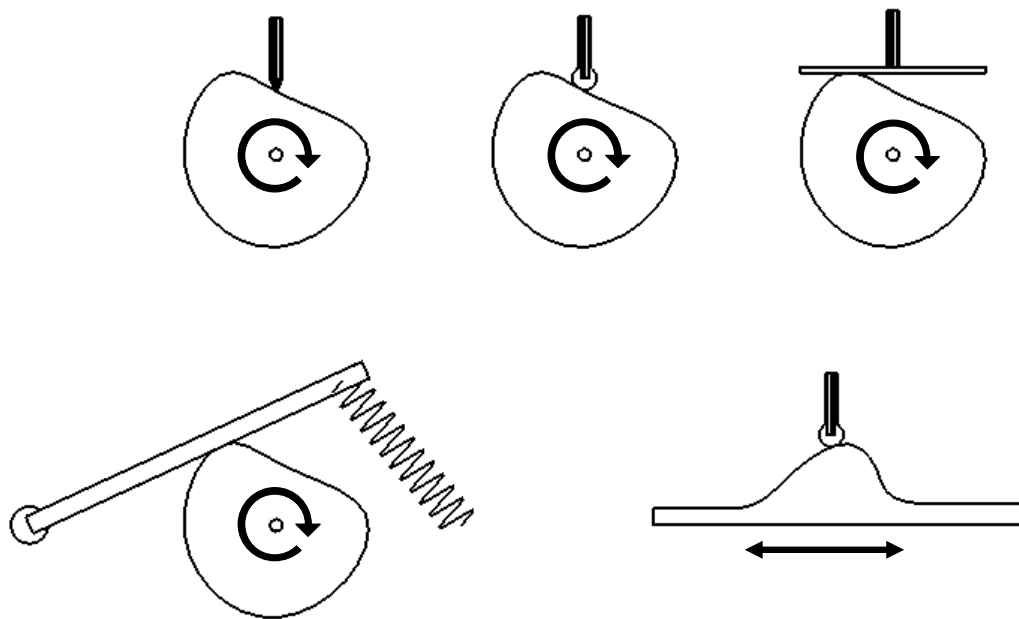


Рис. 2.51 Типы кулачковых пар

Особым частным случаем контактного взаимодействия является взаимодействие кулачка и толкателем или кулисой. Математическая модель этого взаимодействия подобна описанной выше модели контактных сил (см. п. 2.6.4). Комбинации пар кулачок-толкатель (кулачок-кулиса) и примеры их использования представлены на Рис. 2.51.

В зависимости от типа контактного взаимодействия кулачка поршнем можно выделить три типа кулачковых пар, реализованных в УМ

- **точка** (первый рисунок)
- **ролик** (второй и пятый рисунок)
- **плоскость** (третий и четвертый рисунки)

Для контактов типа плоскость и точка модель взаимодействия учитывает **кулоновское (сухое) трение** в контакте. Роликовый контакт считается идеальным (без трения).

**Замечание:** В каждый момент времени рассматривается только одна точка контакта. Если контактных точек несколько, то рассматривается точка с наибольшим внедрением. Примеры описания и/или использования:

- Гл. 3, п. Кулачок
- \samples\mechanisms\cams

### 2.6.6.4. Пружина

Специальный силовой элемент типа *Пружина* является частным случаем обобщенного линейного силового элемента (п.2.6.3), предназначенный для моделирования линейных винтовых пружин с одинаковой жесткостью в направлениях, перпендикулярных оси пружины и с защемлением по концам типа заделки. Предполагается также, что ось пружины расположена вдоль одной из осей СК, связанной с первым из двух тел, соединяемых пружиной.

Матрица жесткости, введенная в п. 2.6.3, для элемента, расположенного вдоль оси Z СК первого тела, имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_s & 0 & 0 & 0 & -c_s H/2 & 0 \\ 0 & c_s & 0 & c_s H/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_s H/2 & 0 & c_\varphi & 0 & 0 \\ -c_s H/2 & 0 & 0 & 0 & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_a \end{pmatrix}$$

Здесь  $c_s, c_l, c_\varphi, c_a$  - сдвиговая, продольная, изгибная жесткости пружины и жесткость на кручение,  $H$  - длина (высота) пружины. Для вертикальной пружины длина  $H$ , как правило, задается при статической нагрузке.

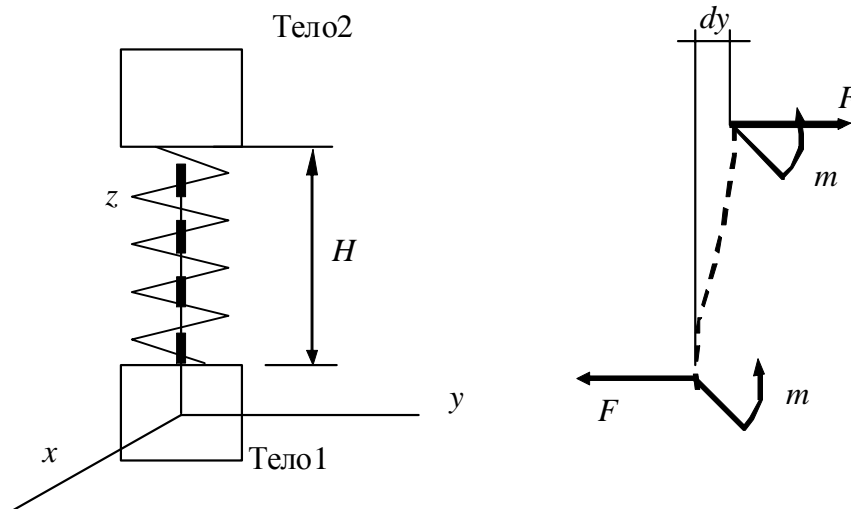


Рис. 2.52. Силы, действующие на пружину при сдвиге  $dy$

Покажем, каким образом получены недиагональные элементы в данной матрице. Пусть второе тело расположено выше первого. Сообщим ему перемещение  $dy$  вдоль оси  $y$ , Рис. 2.52. В результате из-за сдвиговой жесткости пружины на второе тело будет действовать сила, проекция которой на ось  $y$  равна  $F_y = -c_s dy$ . Соответственно, на саму пружину действует в верхней точке противоположная сила и такая же - в нижней точке. В силу уравновешенности пружины получившаяся пара сил с моментом  $c_s dy H$  должна быть уравновешена двумя парами в верхней и нижней заделках пружины. Моменты этих пар должны быть одинаковыми в силу симметрии закрепления пружины, то есть по  $c_s dy H / 2$ . Таким образом, на второе тело будет действовать момент, проекция которого на ось  $x$  равна  $-c_s dy H / 2$ . Это приводит к появлению в матрице жесткости недиагонального элемента

$$C_{42} = c_s H / 2$$

и (в силу симметрии матрицы жесткости), равного ему элемента  $C_{24}$ . Аналогично рассчитываются элементы  $C_{52} = C_{25}$ .

Для элемента, расположенного вдоль горизонтальной оси Y, матрица жесткости имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_s & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm c_s H/2 \\ 0 & c_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_s & \mp c_s H/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp c_s H/2 & c_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_a & 0 \\ \pm c_s H/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_\phi \end{pmatrix},$$

то есть матрица получается из предыдущей матрицы заменой  $x \rightarrow z, y \rightarrow x, z \rightarrow y$ . Аналогичный вид имеет матрица жесткости элемента, расположенного вдоль оси X.

$$C = \begin{pmatrix} c_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 & 0 & 0 & \mp c_s H/2 \\ 0 & 0 & c_s & 0 & \pm c_s H/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm c_s H/2 & 0 & c_\phi & 0 \\ 0 & \mp c_s H/2 & 0 & 0 & 0 & c_\phi \end{pmatrix}$$

Для пружины предусмотрен также автоматический расчет коэффициентов жесткости по значениям радиуса витка, высоты пружины, диаметру прутка и т.д.

**Замечание.** Если необходимо ввести пружины, направление которых не совпадает с одной из локальных осей СК первого тела, то для каждой такой пружины можно ввести специальное фиктивное тело, жестко связанное с первым телом, одна из осей координат которого имеет направление оси пружины.

Примеры описания и/или использования:

- Гл.7. п. *Модели пружин*
- \samples\rail vehicles\ac4

### 2.6.6.5. Зубчатая рейка

Силовой элемент типа «Зубчатая рейка» – это особый случай зубчатого зацепления, описанного выше, см. п. 2.6.6.1. В отличие от пары колесо-шестерня, второе тело (рейка) совершает поступательное движение.

### 2.6.6.6. Сайлент-блок

Элемент данного типа используется для моделирования податливых шарниров и упругих муфт в линейной и нелинейной постановках.

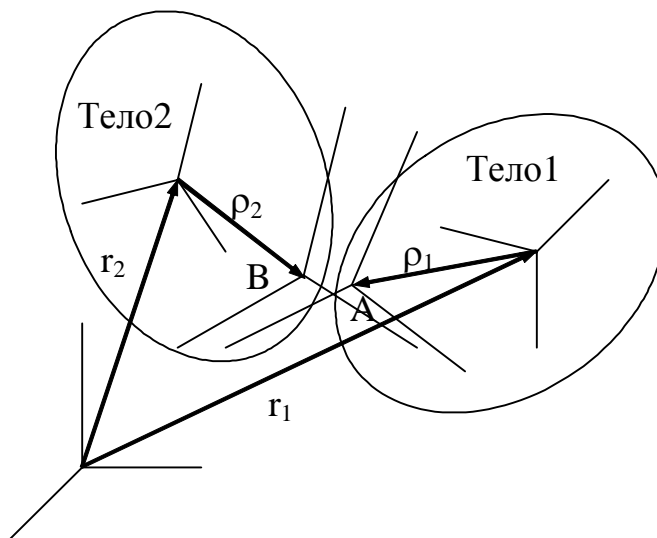


Рис. 2.53. Системы координат силового элемента

Рассмотрим математическую модель податливого шарнира. Введем две системы координат: СКТ1 с началом в точке А, жестко связанную с первым телом и СКТ2 с началом в точке В, жестко связанную со вторым телом, Рис. 2.53. Векторы  $\rho_1, \rho_2$  и постоянные матрицы поворота  $A_{B1}, A_{B2}$  определяют положения СКТ1 и СКТ2 относительно соответствующих тел.

**Предполагается, что смещение СКТ2 относительно СКТ1 в начальный момент и в процессе движения является малым.**

В общем случае математическая модель сайлент-блока как силового элемента выражается через вектор смещения точки В относительно СКТ1

$$\Delta r = r_2 + \rho_2 - r_1 - \rho_1$$

и матрицу поворота (задает ориентацию СКТ2 относительно СКТ1)

$$A_{B1B2} = A_{B1}^T A_{10} A_{02} A_{B2}$$

При малом смещении СКТ2 относительно СКТ1 эта матрица близка к единичной, что позволяет определить вектор поворота СКТ2 относительно СКТ1

$$\Delta \pi = \begin{pmatrix} \Delta \pi_x \\ \Delta \pi_y \\ \Delta \pi_z \end{pmatrix}.$$

При этом проекции вектора поворота определяют малые углы поворота СКТ2 относительно осей СКТ1.

Кососимметрическая матрица вектора поворота выражается через матрицу направляющих косинусов по формуле

$$\Delta \tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \pi_z & \Delta \pi_y \\ \Delta \pi_z & 0 & -\Delta \pi_x \\ -\Delta \pi_y & \Delta \pi_x & 0 \end{pmatrix} = \frac{A_{B1B2} - A_{B1B2}^T}{2},$$

что и позволяет вычислить компоненты вектора поворота.

**Линейная модель сайлент-блока**

В случае линейного сайлент-блока его математическая модель следующая:

$$\begin{pmatrix} F^{B1} \\ M^{B1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ M_0 \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} \Delta r - \Delta r_0 \\ \Delta \pi - \Delta \pi_0 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} v_{12} \\ \omega_{12} \end{pmatrix}$$

Здесь  $F^{B1}, M^{B1}$  – сила и момент в системе координат СКТ1, приведенные к точке  $B$ . Введены также следующие постоянные параметры, характеризующие модель и задаваемые пользователем относительно СКТ1:

-  $C$  и  $D$  - постоянные диагональные матрицы, задающие коэффициенты жесткости и диссипации при смещении вдоль осей и при поворотах вокруг осей СКТ1;

-  $\Delta r_0, \Delta \pi_0$  – малый «offset», то есть “постоянное” смещение СКТ2, например, статическое отклонение; векторы задается в СКТ1;

$v_{12} = \dot{\Delta r}$  - скорость начала отсчета СКТ2 относительно второго тела;

$\omega_{12} = \omega_2 - \omega_1$  – относительная угловая скорость;

$F_0, M_0$  - постоянные значения силы и момента при нулевых скоростях и при  $\Delta r = \Delta r_0, \Delta \pi = \Delta \pi_0$ ; используются, как правило, для задания стационарных или статических значений сил, причем в этом случае часто полагается  $\Delta r_0 = 0, \Delta \pi_0 = 0$ ; силы задается в СКТ1.

**Нелинейная модель сайлент-блока**

В случае нелинейного сайлент-блока его математическая модель следующая:

$$\begin{pmatrix} F^{B1} \\ M^{B1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ M_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_e \\ M_e \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} v_{12} \\ \omega_{12} \end{pmatrix}$$

Нелинейными являются зависимости силы и момента  $F_e, M_e$  от соответствующих компонент векторов перемещения и поворота  $\Delta r - \Delta r_0, \Delta \pi - \Delta \pi_0$

$$F_{ex} = F_{ex}(\Delta x - \Delta x_0), F_{ey} = F_{ey}(\Delta y - \Delta y_0), F_{ez} = F_{ez}(\Delta z - \Delta z_0),$$

$$M_{ex} = M_{ex}(\Delta \pi_x - \Delta \pi_{0x}), M_{ey} = M_{ey}(\Delta \pi_y - \Delta \pi_{0y}), M_{ez} = M_{ez}(\Delta \pi_z - \Delta \pi_{0z})$$

Нелинейные зависимости проекций от перемещений задаются поточечными графиками.

В частности, нелинейных элемент широко используется для моделирования контактов с зазорами по линейным и угловым степеням свободы.

Ввод данных: Гл. 3, п. Ввод данных/Ввод силовых элементов/Ввод специальных сил/Сайлент-блок.

**2.6.7. Т-силы**

Сила и момент, компоненты которых заданы либо явными функциональными зависимостями от времени, либо в текстовом файле в виде колонок, первой из которых является время, а остальные – значения компонент силы и момента.

### 2.6.8. Анализ свойств силового элемента в частотной области

Для скалярного силового элемента (биполярная или шарнирная сила) часто полезным является анализ его свойств на гармоническое возмущение. Рассмотрим силовой элемент с некоторым заданным законом зависимости силы от скалярной величины  $x$  и ее производной по времени  $v$  (п. Типы скалярных сил)

$$F = F(x, v).$$

Рассмотрим изменение переменной  $x$  по гармоническому закону

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + a \sin(2\pi ft) \\ v(t) &= 2\pi fa \sin(2\pi ft) \end{aligned}$$

где  $x_0, a, f$  - центр колебаний, их амплитуда и частота (Гц),  $t$  - время. Отзывом силового элемента на возмущение является периодическая сила

$$F(t) = F(x(t), v(t)).$$

Разложим эту зависимость в ряд Фурье, удерживая только нулевой и первые члены ряда

$$\begin{aligned} F(t) &\approx F_0 + F_K(f) \sin(2\pi ft) - F_C(f) \cos(2\pi ft) = \\ &= F_0 + F_1(f) \sin(2\pi ft - \delta(f)). \end{aligned}$$

На основе данного представления вводятся основные характеристики силового элемента в частотной области:

- динамическая жесткость  $K(f) = F_K(f)/a$
- эквивалентный коэффициент демпфирования  $C(f) = F_C(f)/(2\pi fa)$
- фаза или угол диссипации  $\delta(f)$
- амплитуда отклика  $F_1(f)$ .
- зависимости функции отклика от координаты  $F(x, v(x))$  и скорости  $F(x(v), v)$  при фиксированной частоте возмущения.

Описание инструмента см. в Гл.4, п. *Анализ силовых элементов в частотной области*.  
Пример использования см. в Гл.7, п. *Упруго-фрикционный элемент 2*.

## 2.7. Методика расчета параметров контакта

При задании параметров некоторых силовых элементов вводятся параметры контактной жесткости и диссипации (см. контактные силы, п.2.6.4, фрикционные силы, пп. 2.6.2.2, 2.6.2.3). Рассмотрим методику выбора параметров жесткости  $c$  и диссипации  $\mu$  контактной силы или фрикционного элемента.

Реальная контактная жесткость в силу упругих свойств контактирующих материалов может принимать очень большие значения (скажем,  $10^{11}$  Н/м). Очевидно, что при средних массах контактирующих тел такое значение жесткости внесет в систему очень высокую частоту (порядка  $\sqrt{c/m}$ , где  $c$  – коэффициент жесткости, а  $m$  – масса) и резко замедлит процесс численного моделирования (уменьшится шаг интегрирования). Поэтому на практике используют гораздо меньшие значения жесткости, исходя из следующих соображений. Прикладная теория дифференциальных уравнений (строгое обоснование дается в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений) утверждает, что при наличии в системе двух далеко разнесенных групп частот (например, в одной – порядка 1–10 Гц, а в другой 200–1000 Гц), изменение параметров, влияющих исключительно на быстрые (высокочастотные) процессы не оказывают заметного влияния на медленные (низкочастотные) процессы. Это означает, что если выбрать жесткость  $c$  “достаточно большой”, то ее дальнейшее увеличение не окажет существенного влияния на исследуемые процессы системы. Жесткость является “достаточно большой”, если вносимая в систему частота примерно на порядок больше, чем характерные частоты исследуемой задачи. Частоту контактного взаимодействия  $k$ , вносимую в систему, можно оценить по формуле  $k = \sqrt{c/m}$ , где  $m$  – меньшая из масс взаимодействующих тел. Тогда по выбранной пользователем частоте контактного взаимодействия  $f = k/(2\pi)$  Гц соответствующая контактная жесткость рассчитывается по формуле

$$c = 4\pi^2 f^2 m. \quad (2.9)$$

Рассмотрим пример. Пусть  $m = 20$  кг,  $f = 200$  Гц (то есть частоты исследуемого объекта лежат в области 1–10 Гц). Тогда  $c = 3.16 \times 10^7$  Н/м.

Жесткость, подобранную по приведенному критерию, следует проверить и скорректировать. Для этого проводится численное моделирование, и строятся графики переменных, по которым оценивается динамика исследуемого объекта. Если при двух-десятикратном увеличении жесткости графики практически не меняются, то жесткость выбрана “достаточно большой” и рекомендуется ее уменьшить, чтобы ускорить процесс моделирования. Пределом уменьшения является значение, меньше которого контрольные графики начинают изменяться. Если же тест при увеличении жесткости дает изменение графиков, то жесткость должна увеличиваться до тех пор, пока изменения не прекратятся.

Теперь обсудим методику выбора коэффициента контактной диссипации  $\mu$ . Если коэффициент выбрать “слишком маленьким”, то в контакте могут появиться практически незатухающие высокочастотные колебания (вибрации), которые дадут большие виброускорения, не наблюдающиеся на практике (да и частота этих колебаний подобрана искусственно по методике, рассмотренной выше). Если же этот коэффициент выбрать “слишком большим”, то уравнения движения окажутся очень жесткими (с точки зрения численных методов интегрирования дифференциальных уравнений), что опять же приведет к замедлению моделирования. Особенно важен корректный выбор коэффициента диссипации при моделировании систем с односторонними связями (то есть с зазорами и ударами), поскольку именно от этого параметра зависит значение коэффициента восстановления. Наконец, величина коэффициента должна быть связана с коэффициентом жесткости.

Для определения обоснованного значения коэффициента диссипации будем использовать понятия “доли демпфирования от критического”  $\beta$  и фактора затухания  $\beta^*$ . С этой целью рассмотрим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0, \tag{2.10}$$

соответствующее свободным колебаниям материальной точки в среде с линейным сопротивлением. Как известно из курса теоретической механики, характер процесса, определяемого данным дифференциальным уравнением, определяется соотношением между круговой частотой гармонических колебаний  $k = \sqrt{c/m}$  и коэффициентом затухания  $n = \mu/(2m)$ . При  $n < k$  движение носит колебательный характер с частотой  $k^* = \sqrt{k^2 - n^2}$ , а при  $n \geq k$  - аperiодический (экспоненциальное затухание, носящее неколебательный характер). Граничное значение  $n = k$  носит название критического демпфирования. Доля демпфирования от критического и фактор затухания определяются по формулам

$$\beta = \frac{n}{k}, \tag{2.11}$$

$$\beta^* = \frac{n}{k^*} = \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \in [0, \infty],$$

то есть первый параметр равен отношению коэффициента затухания к круговой частоте гармонических колебаний, а второй – к частоте затухающих колебаний. При  $\beta = \beta^* = 0$  затухание отсутствует, а при  $\beta = 1$  ( $\beta^* = \infty$ ) имеется критическое демпфирование. Параметры выражаются друг через друга в соответствии со следующими формулами:

$$\beta^* = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \beta, \quad \beta = \frac{\beta^*}{\sqrt{1 + \beta^{*2}}}$$

Через введенные параметры легко выражается декремент колебаний (имеет смысл при  $\beta < 1$ )

$$D = e^{-\pi\beta^*} = e^{-\frac{\pi\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}},$$

равный падению амплитуды на половине периода затухающих колебаний. При малом демпфировании параметры близки  $\beta \approx \beta^*$  и

$$D \approx e^{-\pi\beta}.$$

Значения декремента колебаний при различной степени демпфирования представлены в табл.1.

Таблица 1

Зависимости декремента колебаний от доли демпфирования

$\beta$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
D	1	0.729	0.527	0.372	0.254	0.163	0.095	0.046	0.015	0.0015	0

На Рис. 2.54 приведены решения уравнения затухающих колебаний при различных значениях параметра  $\beta$ .

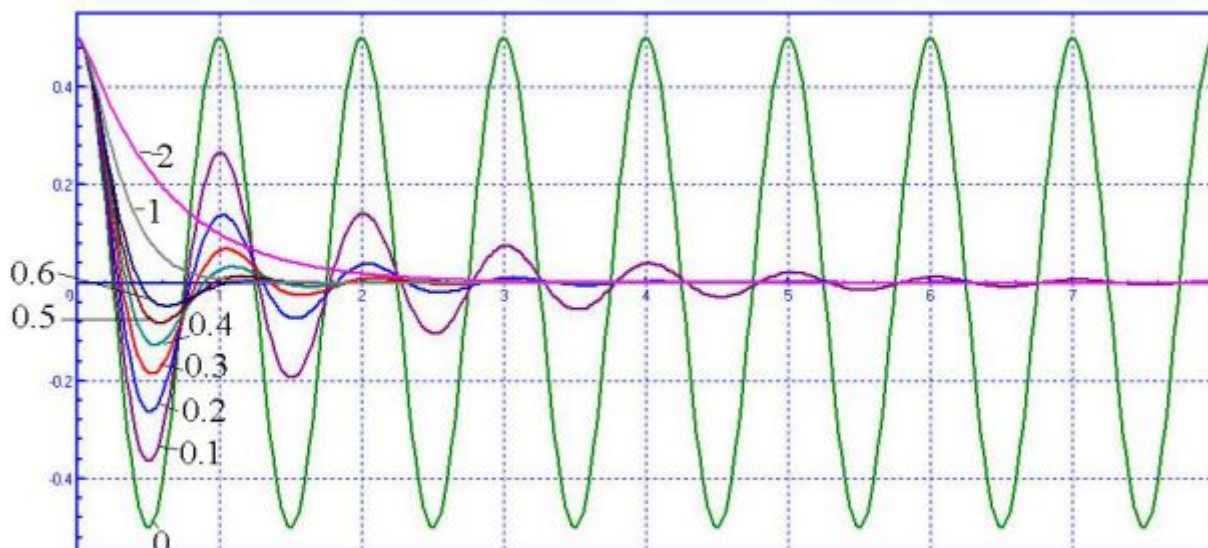


Рис. 2.54. Процесс затухания при различных значениях доли демпфирования от критического

При  $\beta \leq 0.1$  демпфирование считается малым. Значение  $\beta = 0,1$  можно рекомендовать для приближенного учета диссипации в резиновых элементах конструкций. Значение  $\beta = 0,3$  рекомендуется для расчета гасителей транспортных средств (при этом считается, что для затухания требуется три колебания, см. Рис. 2.54). При  $\beta \geq 1$  система считается сильно передемпфированной, и такие ситуации редко встречаются в технических системах.

Проведенный анализ позволяет наполнить смыслом выражения “слишком маленький” или “слишком большой” коэффициент сопротивления. Рекомендуемый интервал значений для доли демпфирования контактных сил  $\beta = 0,1 \div 0,4$ . Таким образом, при определенном значении коэффициента контактной жесткости и доли демпфирования коэффициент диссипации можно рассчитать по формуле

$$\mu = 2\beta\sqrt{mc} \tag{2.12}$$

Для значения коэффициента жесткости, приведенного выше в примере, и при  $\beta = 0,2$  получим  $\mu \approx 10^4$  Нс/м.

Следующая важная проблема: каким образом с помощью контактных силовых элементов правдоподобно моделировать удары? Ответ на этот вопрос позволяет также выбрать более обоснованное значение параметра  $\beta$ , определяющего степень демпфирования при контактном взаимодействии тел.

Как известно, в основе классической теории удара лежит понятие коэффициента восстановления  $e$ , который может быть проиллюстрирован следующим примером. Рассмотрим материальную точку, ударяющуюся о неподвижную плоскость, причем скорость в момент непосредственно перед ударом перпендикулярна плоскости, а ее величина обозначена  $v^-$ . Коэффициент восстановления определяется по формуле

$$e = \frac{v^+}{v^-},$$

где  $v^+$  - величина скорости непосредственно после отскока.

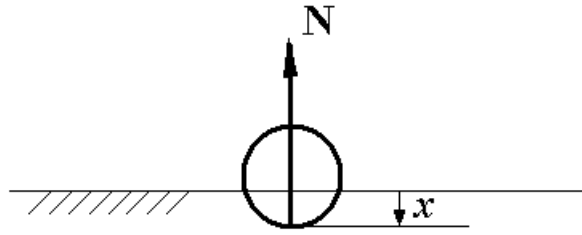


Рис. 2.55. К модели процесса удара

Рассмотрим модель контактного взаимодействия точки с плоскостью (Рис. 2.55), переменная  $x$  на рисунке определяет глубину внедрения, от которой зависит нормальная составляющая силы реакции

$$N_x = -cx - \mu\dot{x}.$$

Движение точки в режиме контакта описывается дифференциальным уравнением (2.10) с начальными условиями  $x(0) = 0, v(0) = v^-$ . В процессе удара на этапе сжатия (точка движется вниз) нормальная реакция растет, а на этапе обратного движения (релаксации) – уменьшается. В некоторый момент времени  $\tau$  нормальная реакция становится равной нулю и процесс удара заканчивается. Таким образом,  $v(\tau) = v^+$ .

Для определения скорости после удара рассмотрим решение уравнения (2.10) с данными начальными условиями.

$$x = \frac{v^-}{k^*} e^{-nt} \sin(k^* t),$$

$$v = v^- e^{-nt} \left( -\frac{n}{k^*} \sin(k^* t) + \cos(k^* t) \right).$$

В момент окончания удара

$$0 = N(\tau) = \mu v(\tau) + cx(\tau) = m(2nv(\tau) + k^2 x(\tau)) = v^- e^{-n\tau} m k^* \left( 2\frac{n}{k^*} \sin(k^* \tau) + \left( 1 - \frac{n^2}{k^{*2}} \right) \cos(k^* \tau) \right),$$

то есть время удара определяется из выражения

$$\operatorname{tg}(k^* \tau) = \frac{2\beta^*}{\beta^{*2} - 1}$$

или

$$\tau = \begin{cases} \pi + \frac{1}{k^*} \arctan\left(\frac{2\beta^*}{\beta^{*2} - 1}\right), \beta^* < 1 \\ \frac{1}{k^*} \arctan\left(\frac{2\beta^*}{\beta^{*2} - 1}\right), \beta^* \geq 1 \end{cases}$$

Полученный результат можно несколько упростить, если заметить, что

$$\sin(k^* \tau) = \frac{2\beta^2}{\beta^*}$$

и окончательно

$$\tau = \frac{1}{k^*} \arcsin\left(\frac{2\beta^2}{\beta^*}\right)$$

Теперь значение скорости после удара легко находится:

$$v^+ = |v(\tau)| = \frac{k^2}{2n} x(\tau) = \frac{v^- k^2}{2nk^*} e^{-n\tau} \sin(k^* \tau) = v^- e^{-\beta^* \varphi^+},$$

Здесь введена фаза отрыва  $\varphi^+ = k^* \tau = \arcsin(2\beta^2/\beta^*)$ , которая, в отличие от времени удара  $\tau$ , зависит только от параметра демпфирования  $\beta$  (или  $\beta^*$ ).

Итак, для коэффициента восстановления имеем следующую красивую формулу

$$e = e^{-\beta^* \varphi^+}$$

Полученная формула представления в ниже в табличной и графической формах.

Таблица 2

Зависимости коэффициента восстановления от доли демпфирования

$\beta$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$e$	1	0.859	0.744	0.65	0.572	0.506	0.451	0.404	0.364	0.329	0.298
$\beta$	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1	
$e$	0.272	0.249	0.228	0.21	0.194	0.18	0.167	0.155	0.145	0.135	

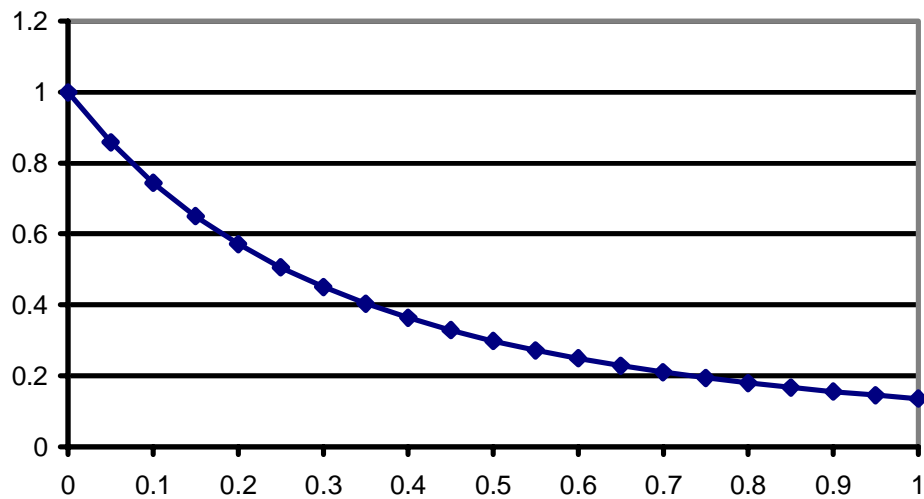


Рис. 2.56. Зависимости коэффициента восстановления от доли демпфирования

Зная или определяя экспериментально значение коэффициента восстановления можно оценить степень контактного демпфирования и использовать значение параметра  $\beta$  для оценки коэффициента диссипации  $\mu$ .

## 2.8. Подсистемы

### 2.8.1. Метод подсистем

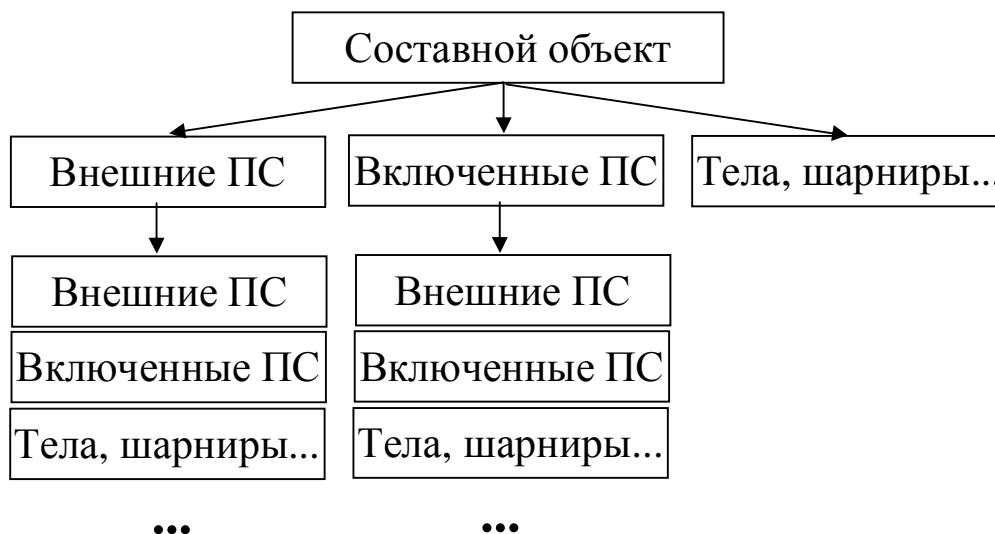
Если моделируется механическая система, содержащая сотни и даже тысячи тел, уравнения движения становятся настолько громоздкими, что может возникнуть проблема их компиляции. При моделировании некоторых объектов, например рельсовых экипажей, модель содержит несколько одинаковых частей (две тележки, четыре или шесть колесных пар, колесно-моторных блоков). Для моделирования таких систем удобно использовать *метод подсистем*. В этом случае механическая система предварительно разделяется на несколько частей – подсистем – и называется *составным объектом*. Отдельные подсистемы могут быть как связаны друг с другом посредством шарниров и силовых элементов, так и полностью независимыми.

Особенно эффективен метод подсистем, когда несколько подсистем в составном объекте являются *кинематически тождественными*. Назовем подсистемы кинематически тождественными, если они имеют одинаковую кинематическую схему. Дадим строгое определение кинематической тождественности.

Пара подсистем является кинематически тождественной, если при любой конфигурации возможно их пространственное совмещение в базовой системе координат посредством следующих преобразований:

- поступательный сдвиг (вектор сдвига постоянный);
- поворот вокруг произвольной оси на постоянный угол;
- изменение параметров конструктивных сдвигов в кинематических парах (то есть изменение длин звеньев);
- изменение значений локальных шарнирных координат.

При удовлетворении некоторых условий кинематически тождественные подсистемы имеют совпадающие уравнения движения. Эти условия следующие: все постоянные параметры (например массы, длины конструктивных сдвигов, компоненты вектора по направлению силы тяжести и так далее), принимающие для кинематически тождественных подсистем различные численные значения, должны быть заданы в *символьной форме* (то есть идентификаторами). При моделировании движения параметрам разных подсистем можно назначать различные значения.



Модель может быть представлена деревом *внешних* и *включенных* подсистем.

**Внешние подсистемы** порождаются одним объектом – предком. Изменения, вносимые пользователем в объект-предок, автоматически воспринимаются всеми внешними подсистемами моделируемого объекта, и все изменения во внешних подсистемах можно производить только таким образом. Составной объект, таким образом, не распоряжается ни структурой, ни параметрами внешних подсистем, а лишь ссылается на них. Вместе с тем, составной объект может добавлять шарниры и силовые элементы, связывая тела различных подсистем. Таким образом, в случае кинематически тождественных подсистем исследователю достаточно лишь один раз описать одну из них, то есть создать предка, и лишь один раз синтезировать уравнения движения. Уравнения формируются в виде динамической библиотеки (UmTask.dll), одной для всех внешних подсистем, имеющих общего предка. При моделировании движения происходит многократное обращение к этому набору, причем передаются локальные координаты и параметры, соответствующие конкретной подсистеме. Благодаря этому значительно экономится оперативная память компьютера.

**Включенные подсистемы**, в отличие от внешних подсистем, полностью принадлежат составному объекту, он владеет их структурой (телами, шарнирами, силовыми элементами, графическими образами и так далее) и параметрами. Несколько включенных подсистем, порожденных одним и тем же объектом – предком, по желанию пользователя могут быть произвольным образом изменены путем модификации их структуры и параметров. Уравнения движения включенных подсистем синтезируются одновременно с уравнениями движения составного объекта.

Подсистемы образуют структуру дерева, то есть объект может иметь любое число включенных и внешних подсистем, каждая из которых, в свою очередь, может быть составным объектом, то есть содержать любое число подсистем обоих типов.

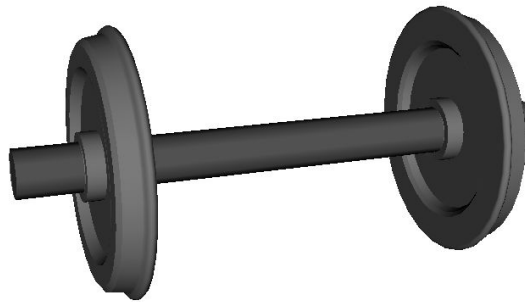
Метод подсистем является основой разработки баз данных при моделировании технических систем (например, базы данных колесных пар, тележек и так далее – в случае моделировании динамики рельсовых экипажей).

**Замечание.** Структура дерева для подсистем предполагает, что отсутствует заикливание внешних подсистем, то есть объект не может содержать подсистему, в структуру которой сам объект входит в качестве внешней подсистемы. Данное вполне очевидное ограничение автоматически контролируется программой.

## 2.8.2. Стандартные подсистемы

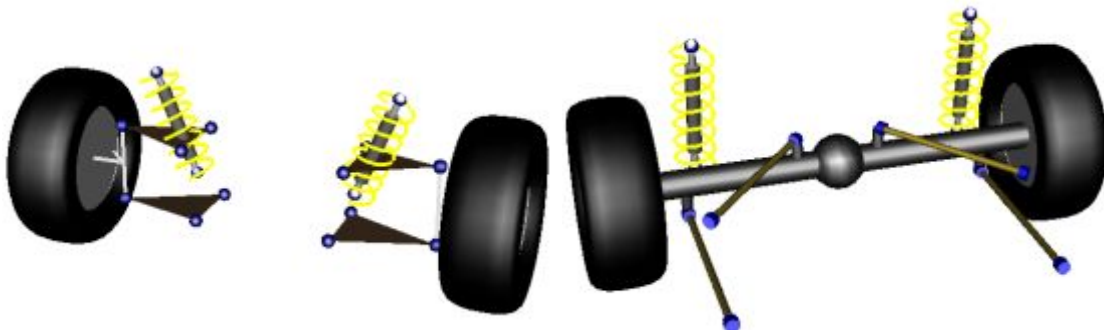
Стандартные подсистемы – это автоматически генерируемые подсистемы, являющиеся основой моделирования технических систем с учетом их особенностей. На базе стандартных подсистем строятся основные модули УМ: моделирования железнодорожных экипажей, автомобилей, гусеничных машин, балласта.

### 2.8.2.1. Стандартная подсистема – колесная пара



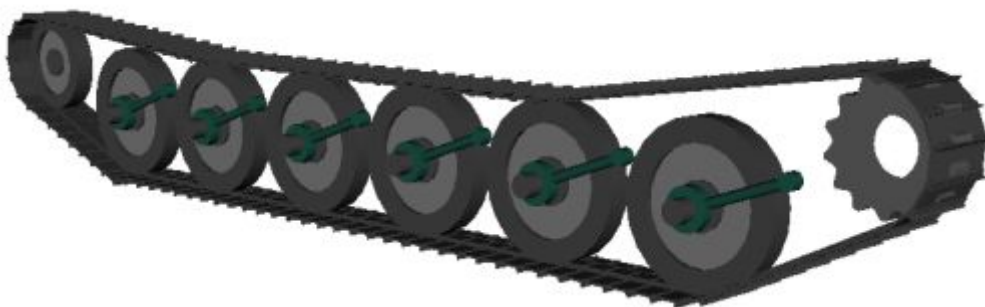
Стандартная подсистема “колесная пара” лежит в основе моделирования динамики рельсовых экипажей. Одновременно с автоматическим включением в экипаж колесных пар, программно рассчитываются силы взаимодействия колеса с рельсом, а также предусмотрены многочисленные интерфейсные возможности и формы анализа результатов моделирования, которые и образуют железнодорожный модель УМ.

### 2.8.2.2. Стандартные подсистемы – подвески автомобиля



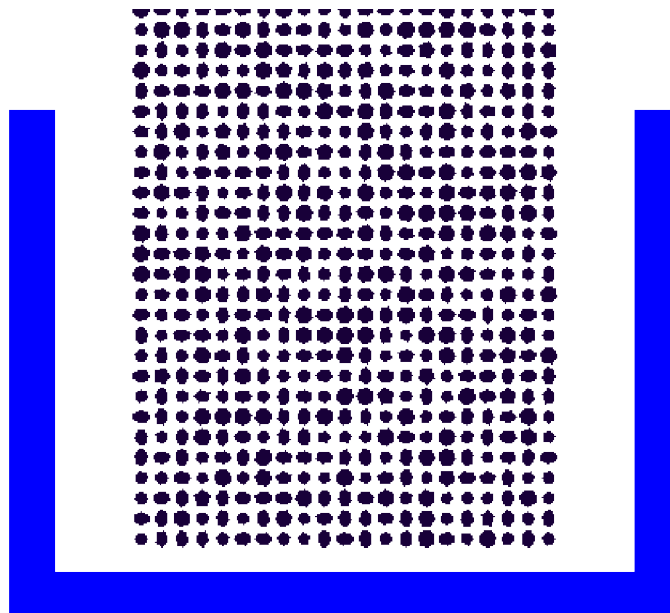
В основу автомобильного модуля УМ положены несколько стандартных подвесок автомобиля.

### 2.8.2.3. Стандартная подсистема - гусеница



Модуль моделирования динамики гусеничных машин основан на стандартной подсистеме “гусеница”, которая позволяет автоматически генерировать гусеницу с заданным числом траков, опорных катков и так далее.

#### 2.8.2.4. Стандартная подсистема – балласт



Автоматически созданная подсистема «балласт».  
Эксперимент – укладка балласта в прямоугольную емкость

Для исследования свойств балласта путем представления его системой сотен и тысяч тел, находящихся в контактном взаимодействии, реализована стандартная подсистема – балласт.

Для данной подсистемы автоматически генерируются элементы балласта с заданными геометрическими и физическими свойствами. Для подсистемы балласт разработаны процедуры быстрого расчета динамики среды, состоящей из тысяч элементов.

### 2.8.3. Примеры составных объектов

#### 2.8.3.1. Составной объект – многозвенный физический маятник

Рассмотрим цепочку одинаковых тел, соединенных в цепочку посредством шарниров с одной вращательной степенью свободы. Цепочка подвешена к неподвижной опоре и может совершать движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Если число тел не превосходит трех-четырёх десятков, то моделирование такой системы не представляет особых проблем. При большем числе тел уравнения движения в символической форме записи становятся очень громоздкими и могут появиться проблемы с их компиляцией.

Кроме роста объема уравнений движения возникает проблема описания объекта. При традиционном подходе придется вводить инерционные параметры для каждого тела, описывать все шарниры, что займет значительное время. Каким же образом можно смоделировать движение стозвенного маятника? Разрежем цепочку на десять одинаковых десятизвенных маятников, то есть на десять подсистем. Все они кинематически тождественные, так как порождаются одним предком: десятизвенным маятником. Данный предок имеет десять тел и одиннадцать шарниров: один внешний (с помощью которого он одна подсистема)

тема будет соединена с другой) и десять внутренних. Девять внутренних шарниров соединяют тела маятника, а десятый имеет три степени свободы и служит для описания положения одного из тел простого объекта (например пятого) относительно базовой системы координат.

Поскольку составной объект – стозвенный маятник – порождается единственным предком, ввод данных и синтез уравнений движения осуществляется лишь для десятизвенного маятника, что не представляет никаких проблем. Затем формируется составной объект из десяти внешних подсистем и связей между ними.

### 2.8.3.2. Составной объект – динамически несвязанные подсистемы

Если исследователю необходимо сравнить в одном масштабе времени поведение одного и того же объекта в различных ситуациях или разных объектов, то для этого также удобно использовать метод подсистем. В этом случае формируется составной объект, содержащий несколько внешних или внутренних подсистем. Например, составной объект – два робота Пума или Пума и станфордский манипулятор. В таких случаях подсистемы динамически не связаны, однако интегрирование уравнений движения производится одновременно, и отображение результатов на экран дисплея производится в одном масштабе времени. Если же роботы динамически связаны, например, совместно производят перенос одного груза, то в составном объекте следует добавить тело – переносимый груз – и описать силовые элементы, определяющие взаимодействие каждого из роботов с переносимым грузом.

Число несвязанных подсистем в составном объекте ограничено лишь ресурсами ПК.

### 2.8.3.3. Составной объект – стенд для динамических испытаний

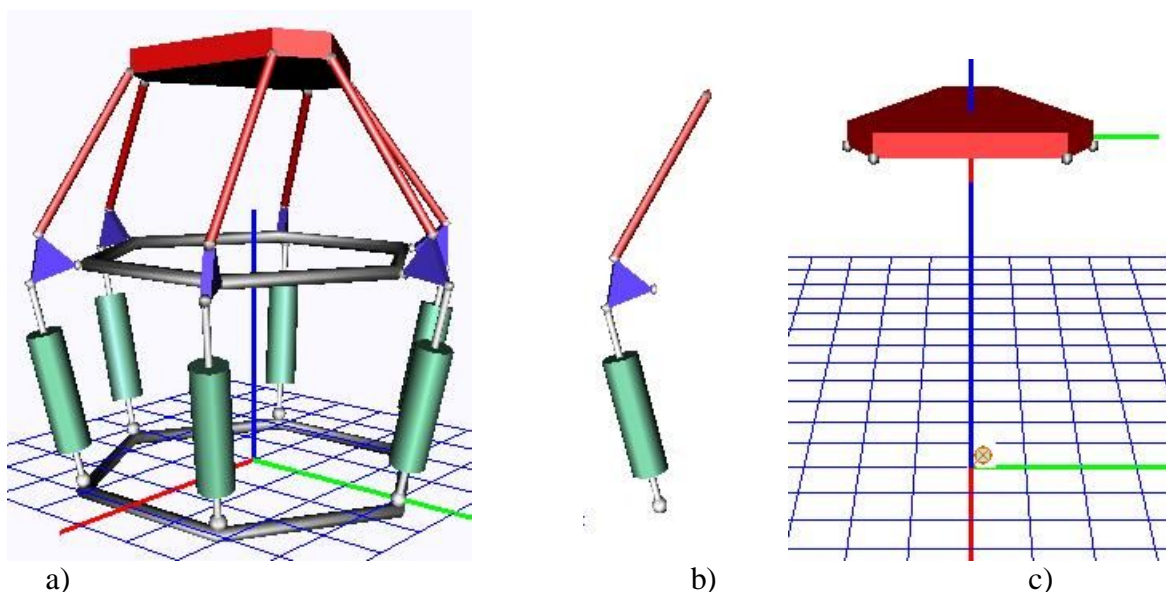
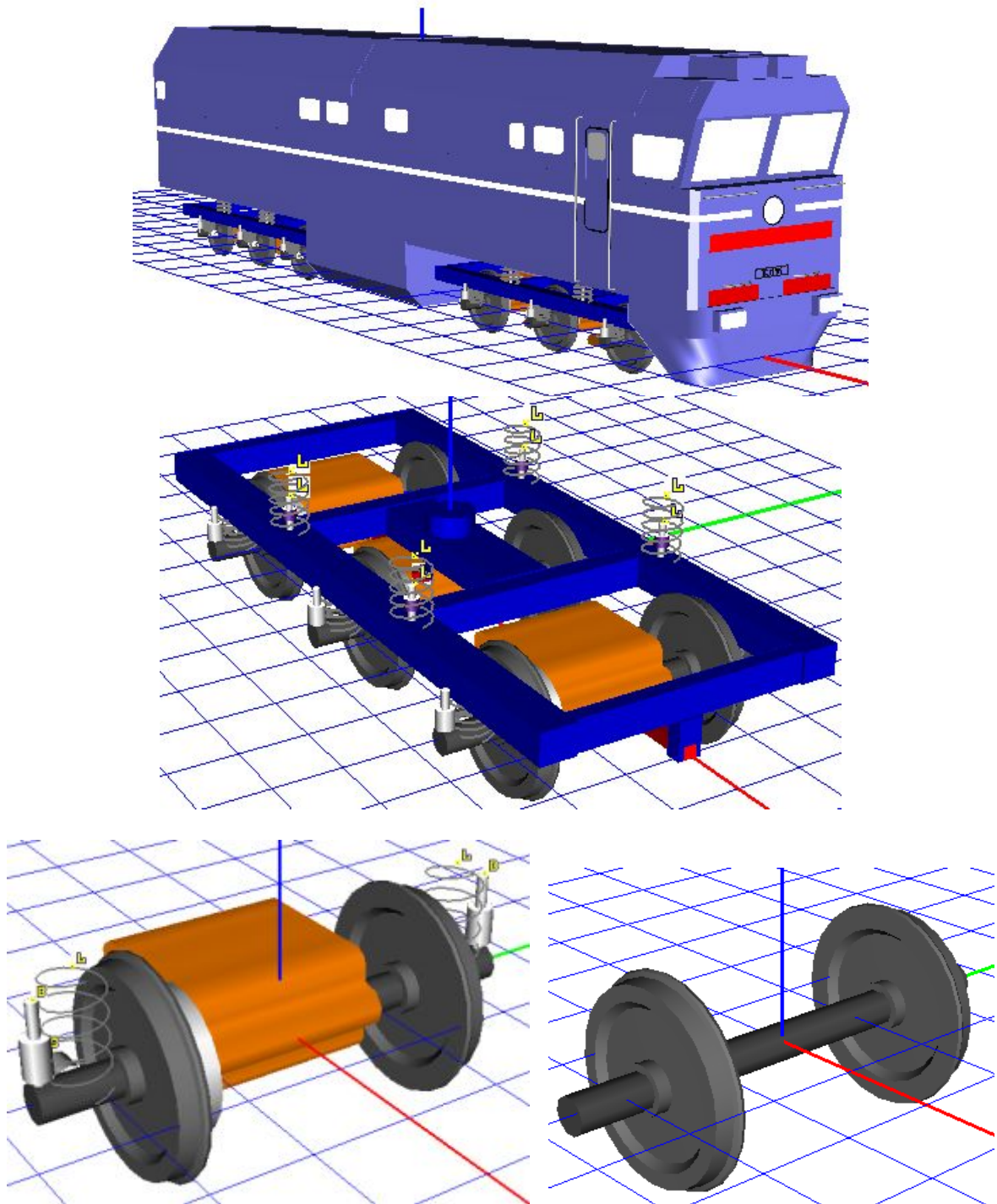


Рис. 2.57.

Рассмотрим техническую систему – шестистепенной стенд для динамических испытаний (Рис. 2.57а). Разрежем модель на семь частей по шарнирам, соединяющим шесть механизмов управления с платформой. Механизмы управления кинематически тождественны и порождаются единственным предком (Рис. 2.57б). Предок – механизм управления – имеет единственный внешний шарнир. Составной объект будет иметь 6 включенных подсистем, положение каждой из которых относительно базы объекта можно задать с помощью сдвига и поворота. Дополнительно для объекта следует описать тело – платформу, а также установить связи между каждой из подсистем и платформой. Для установления связей с подсистемами платформе надо задать координаты шесть точек связей, а затем уста-

новить соответствие между внешними шарнирами каждой подсистемы и одной из точек связи.

#### 2.8.3.4. Составной объект – тепловоз ТЭ116



Модель тепловоза как составного объекта состоит из кузова и двух включенных подсистем – тележек. Тележка содержит три включенные подсистемы – колесно-моторные блоки, одно тело – раму и элементы второй ступени подвешивания. Колесно-моторный блок содержит одну включенную подсистему – колесную пару (стандартная подсистема UM), двигатель, силовые элементы первой ступени подвешивания (пружины, гасители, тяговые поводки), зубчатую передачу.

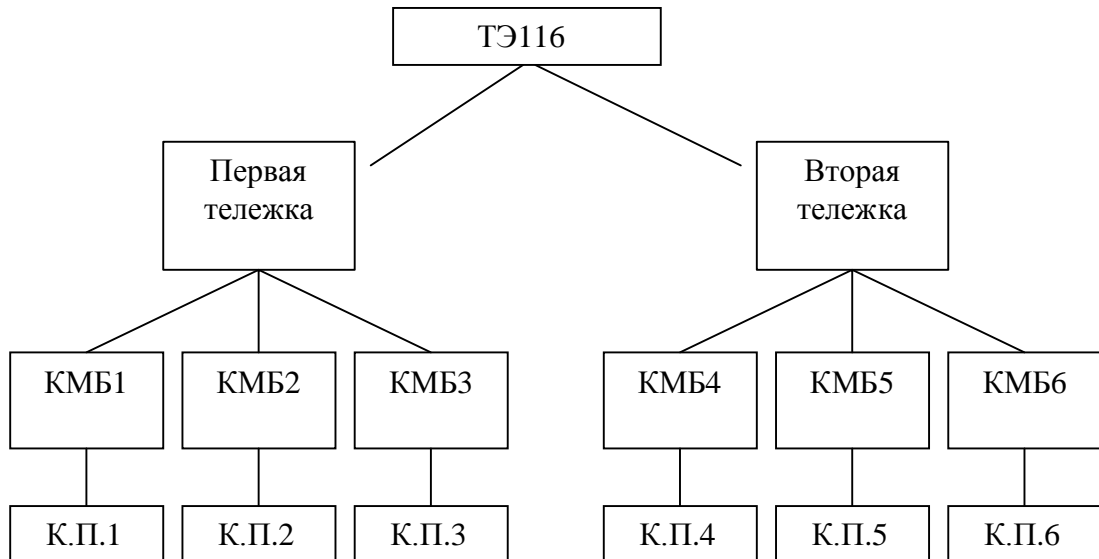
Дерево подсистем модели тепловоза имеет четыре уровня.

Описание объекта в данном случае происходит в три этапа.

*Этап 1.* Создается объект-предок: колесно-моторный блок, в который включается одна стандартная подсистема – *колесная пара*.

*Этап 2.* Создается объект-предок: тележка, в которую включается три раза подсистема *колесно-моторный блок*.

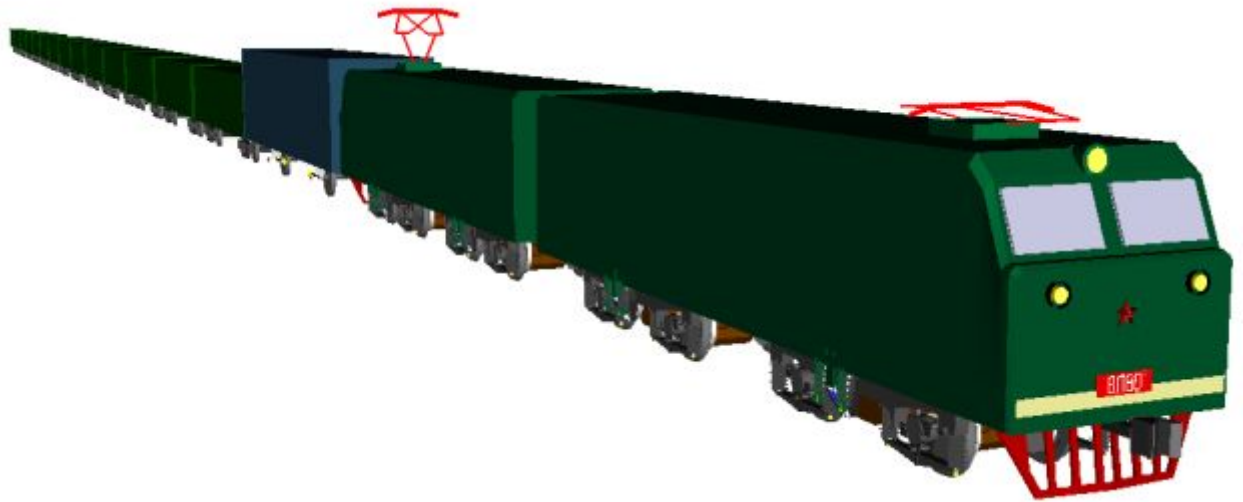
*Этап 3.* Создается модель тепловоза, в которую включается два раза подсистема *тележка*.



Каждая из включенных подсистем доступна для редактирования, что позволяет учесть ее особенности. Например, поперечные силовые связи средних осей тележек с рамой отличаются от связей крайних колесных пар. Соответствующие изменения легко вводятся путем редактирования соответствующей подсистемы *колесно-моторный блок* (КМБ).

Тем самым значительно сокращается время создания весьма сложных моделей, а при создании развитой базы данных типовых подсистем-предков процесс создания моделей рельсовых экипажей становится весьма простым.

### 2.8.3.5. Пример составного объекта – поезд



Пространственная модель поезда представляет собой сложную составную систему. Рассмотрим модель, состоящую из двухсекционного электровоза ВЛ80 и пятнадцати вагонов.

Модель, изображенная на рисунке имеет 218 степеней свободы и состоит из двух внешних подсистем и четырнадцати включенных. В качестве внешних подсистем рассматриваются электровоз и двухосный вагон, следующий непосредственно за электровозом. Каждая из включенных подсистем моделирует «фиктивный», то есть сильно упрощенный вагон, имеющий шесть степеней свободы. Все подсистемы связаны друг с другом моделями автосцепок.

## 2.9. Линеаризация уравнений движения и линейный анализ

### 2.9.1. Уравнения равновесия и их решение

Рассмотрим уравнения движения системы со стационарными, то есть не зависящими явно от времени, связями. При наличии в модели разрезанных шарниров используется набор избыточных координат, и уравнения имеют следующий вид (для простоты опустим вспомогательные координаты из уравнений связей), (2.1):

$$M(q)\ddot{q} + k(q, \dot{q}) = Q(q, \dot{q}) + G^T(q)\lambda, \\ g(q) = 0$$

В положении равновесия при  $\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0$  имеем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$Q(q, 0) + G(q)^T \lambda = 0, \quad g(q) = 0 \tag{2.13}$$

относительно неизвестных значений координат  $q=q_0$  и множителей Лагранжа  $\lambda = \lambda_0$ . Для решения этой системы используется метод Ньютона-Рафсона, на каждой итерации которого решается система линейных уравнений

$$\left( Q_q(q_0^k, 0) + \Phi(q_0^k, \lambda_0^k) \right) \Delta q_0^{k+1} + G(q_0^k)^T \lambda_0^{k+1} = 0, \quad G(q_0^k) \Delta q_0^{k+1} = -g(q_0^k) = 0, \\ q_0^{k+1} = q_0^k + R \Delta q_0^{k+1}$$

Здесь  $Q_q$  - матрица Якоби,  $Q_q = \partial Q / \partial q^T$ , матрица  $\Phi$  определена выражением

$$\Phi = \partial(G^T \lambda) / \partial q^T,$$

$R$  – коэффициент релаксации, обычно принимаемый равным 1.

Итерации прерываются, когда выполняется условие

$$\sum |\delta_i| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  заданная погрешность, а  $\delta_i$  - невязки в правых частях уравнений (2.13).

В качестве начального приближения  $q_0^0 = q^0$  используются значения координат  $q^0$ , заданные пользователем. Матрицы Якоби  $Q_q(q_0^k, 0), \Phi(q_0^k, \lambda_0^k)$  определяются численно на каждой итерации в соответствии с формулами

$$Q_{qi}(q_0^k, 0) = \left( Q(q_0^k + \delta q_i, 0)^T - Q(q_0^k, 0)^T \right) / \delta, \\ \Phi_i(q_0^k, \lambda_0^k) = \left( G(q_0^k + \delta q_i)^T - G(q_0^k)^T \right) \lambda_0^k / \delta.$$

Здесь  $Q_{qi}, \Phi_i$  - столбцы соответствующих матриц с номером  $i$ ,  $\delta$  - малое число, столбец  $\delta q_i$  содержит нулевые элементы, за исключением  $i$ -го, равного  $\delta$ .

### 2.9.2. Расчет частот и собственных значений

Для расчета собственных частот и собственных значений используется QR алгоритм. Собственные формы и собственные векторы определяются методом обратных итераций.

## 2.10. О размерностях

В комплексе УМ принята система единиц SI: кг, м, с. При решении задач динамики не следует использовать производные единицы: см, кН и др. При решении задач кинематики размерность особой роли не играет. В программе ввода углы обычно задаются в градусах

(при задании начальных условий и пределов), в то время как при моделировании движения их численные значения определяются в радианах.

### **2.11. Синтез уравнений движения механической системы их анализ**

Синтез соотношений кинематики и уравнений движения простого объекта производится в символьной форме с использованием специализированного модуля программы. Такой подход к формированию уравнений позволяет уменьшить число операций, связанных с вычислением элементов уравнений при численном моделировании движения. Для более эффективного снижения числа операций используются процедуры вынесения за скобки и подстановки в символьных выражениях. Уравнения выводятся либо в нелинейной форме, либо линеаризуются в окрестности стационарного движения.

Уравнения движения системы тел строятся с использованием формализма Ньютона-Эйлера и имеют вид дифференциально-алгебраических уравнений. Анализ уравнений движения производится путем численного уравнений движения методами ABM и BDF с автоматическим выбором шага и порядка метода и метод Парка с автоматическим контролем точности. Для интегрирования линеаризованных уравнений используются методы Рунге-Кутты, Гира 2-го порядка с постоянным шагом, а также метод Парка (для жестких систем)

Для интегрирования жестких дифференциальных уравнений (например при наличии контактных сил) рекомендуется использовать метод Парка с выводом матриц Якоби уравнений движения при автоматизированном синтезе уравнений движения.

Предусматривается расчет положений равновесия нелинейных объектов, линеаризация уравнений в окрестности найденного положения равновесия. Для линейных систем предусмотрены стандартные процедуры анализа: расчет собственных частот и форм колебаний, построение амплитудно-частотных характеристик, корневых годографов и так далее.

### **2.12. Открытость комплекса и программирование в среде UM**

С целью повышения универсальности программного комплекса предусмотрена его *открытость* на этапе численного моделирования движения. Пользователь имеет возможность подключать собственные модули и влиять на процесс моделирования путем обработки сообщений программы. Программирование в среде UM предполагает использование некоторых внутренних процедур и типов данных, описанных в настоящем руководстве.

Разработка специальных модулей, подключаемых к программе, дает возможность учесть особенности отдельных классов технических систем.

Подробнее об этом см. в «Глава 5. Программирование в среде UM»

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kraus P.R., Fredriksson A., Kumar V.S Modeling of frictional contacts for dynamic simulation / Proc. of IROS 1997 Workshop on Dynamic Simulation: Methods and Applications, Sept. 1997.
2. M. Cyrus and J. Beck. Generalized Two- and Three-Dimensional Clipping. *Computers & Graphics*, Vol. 3, pp. 23-28, 1978.